ثانية باكلوريا علوم تجريبية

نماذج فروض محروسة

فروض محروسة

مع تصحيح مفصل

موسم 2020 / 2021

الحمد لله وبه أستعين

ثانية بكالوريا علوم فزيائية

التحضير للفرض المحروس

رقم 3

الدورة الثانية

موسم 2020 – 2021

بسم الله الرحمان الرحيم.
فهذا تجميع لبعض فروض الدورة الثانية
موسم 2020 / 2021
أسأل الله أن ينفعني بها يوم لا ينفع مال ولا بنون.

ثانوية الليمون:
2 باك علوم

نموذج 1 للواجب الثالث - الدورة II -

2021 - 2020

التمرين 1 [التكامل]

1) أحسب مايلي: $J=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$; $I=\int_1^3\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

2) أوجد الأعداد a و b و c من $\mathbb{R}$ بحيث ،

لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$ ثم أحسب : $K=\int_1^2\frac{1}{x(x+1)^2}dx$

التمرين 2 [الأعداد العقدية]:

I) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ z^2-(3-2\sqrt{3})z+7-4\sqrt{3}=0$

I-1) تحقق أن : $\Delta=[i(2-\sqrt{3})]^2$

I-2) ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $Im(z_2)>0$

I-2-أ) تحقق أن : $z_2=(2-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$

I-2-ب) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي ثم استنتج قيمة : $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2022}$

II) المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم : $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

ليكن R الدوران ذو المركز $\Omega(2+i)$ والزاوية $\frac{\pi}{3}$.

نعتبر النقطتين A و B بحيث : $z_A=6-2i$ و $B=R(A)$.

II-1) بين أن : $\frac{z_B-z_\Omega}{z_A-z_\Omega}=e^{i\pi/3}$ ثم استنتج طبيعة المثلث : ΩAB

II-2) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $|z-z_A|=|z-z_B|$

II-2-أ) حدد المجموعة (Γ) . II-2-ب) هل $\Omega\in(\Gamma)$ ؟ (مع التعليل)

التمرين 3 [دراسة دالة]

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالتعبير:

$$f(x)=(x-\frac{1}{2})e^{2x}-4(x-1)e^x-2$$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

2) بين أن : $f(x)=xe^{2x}\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^x}+\frac{4}{xe^x}-\frac{2}{xe^{2x}}\right)$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

3) ضع جدول تغيرات الدالة f .

4) أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f .

5) بين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى المجال $[-2,-1]$

(نأخذ القيم : $e^4\simeq\frac{225}{4}$; $e^2\simeq\frac{15}{2}$; $e\simeq\frac{11}{4}$)

6) ارسم $(\mathcal{C}_f)$. المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ و نعتبر : $\ln(2)=0,7$.

7) أحسب التكامل : $\int_0^1 xe^x(e^x-2)dx$ (يمكن استعمال السؤال 3))

★ ★ ★ ★

تصحيح النموذج رقم 1

التمرين 1:

1) حساب I :

نعلم أن:

$$\int_a^b u'(x)e^{u(x)}dx = \left[e^{u(x)}\right]_a^b$$

$$I=\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int_1^3 -\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}dx$$

$$= -\int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}}dx = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^3$$

$$= -\left(e^{\frac{1}{3}} - e^{1}\right) = \boxed{-e^{\frac{1}{3}}+e}$$

حساب J :

نعلم أن:

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \left[\ln|u(x)|\right]_a^b$$

$$J=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln(x)}dx = \int_e^{e^2}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}dx$$

$$=\int_e^{e^2}\frac{\ln'(x)}{\ln(x)}dx = \left[\ln|\ln(x)|\right]_e^{e^2}$$

$$=\ln(\ln e^2)-\ln(\ln e)$$

$$=\ln(2)-\ln(1)=\boxed{\ln(2)}$$

2) حساب a و b و c : لدينا:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{a}{x} + \frac{b(x+1)+c}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2+b(x+1)x+cx}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x(x+1)^2}$$

وهذا يستلزم:

$$(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a=1$$

إذا:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-b=1 \\ c=-(2a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

حساب K :

لدينا:

$$K=\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dx$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$$

دالة أصلية لـ: $\frac{1}{x}$ هي $\ln|x|$

دالة أصلية لـ: $\frac{1}{x+1}$ هي $\ln|x+1|$

دالة أصلية لـ: $-\frac{1}{(x+1)^2}$ هي $\frac{1}{x+1}$

إذا:

$$K=\left[\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right]_1^2$$

$$= \ln(2)-\ln(3)+\frac{1}{3} - \left(\ln(1)-\ln(2)+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln(2)-\ln(3)+\frac{1}{3}+\ln(2)-\frac{1}{2}$$

$$= 2\ln(2)+\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{2-3}{6}$$

$$= \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{6}}$$

التمرين 2:

الجزء I :

$$(E):\ z^2-(3-2\sqrt{3})z+7-4\sqrt{3}=0$$

I-1) التحقق :

لدينا:

$$\Delta = (3-2\sqrt{3})^2-4(7-4\sqrt{3})$$

$$= 9-12\sqrt{3}+12-28+16\sqrt{3}$$

$$= -7+4\sqrt{3} = -(7-4\sqrt{3})$$

$$= -(4-4\sqrt{3}+3) = -\left(2^2-2(2)(\sqrt{3})+\sqrt{3}^2\right)$$

$$= -(2-\sqrt{3})^2 = \left[i(2-\sqrt{3})\right]^2$$

لأن: $-1 = (i)^2$

ملاحظة: يمكن حساب Δ. ثم نقارنه مع التعبير $[i(2-\sqrt{3})]^2$

I-2-أ) التحقق:

لدينا: $z_2 = \frac{(3-2\sqrt{3})+i(2-\sqrt{3})}{2}$

لأن: ($Im(z_2) = 2-\sqrt{3} > 0$)

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+i(2-\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{-(2-\sqrt{3})\sqrt{3}+i(2-\sqrt{3})}{2} = (2-\sqrt{3})\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)$$

$$= (2-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$

I-2-ب) لدينا:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

إذن:

$$z_2 = \left[(2-\sqrt{3});\ \frac{5\pi}{6}\right]$$

$$z_1 = \overline{z_2} = \left[2-\sqrt{3},\ -\frac{5\pi}{6}\right]$$

الاستنتاج: نستعمل الكتابة المثلثية:

$$\frac{z_2}{z_1} = \left[\frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})};\ \frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right] = \left[1;\ \frac{10\pi}{6}\right]$$

ولدينا: 2022 من مضاعفات 6؛

$$2022 = 6\times 637$$

إذن:

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2022} = \left[1^{2022};\ \frac{10\pi}{6}\times 2022\right]$$

$$= [1;\ 10\pi\times 637] = [1;\ 2k\pi]$$

$$= 1+i\times 0 \quad (\text{حيث } k = 5\times 637)$$

$$= \boxed{1}$$

[2]

الجزء II:

R دوران مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

إذن:

$$z' - z_\Omega = e^{i\pi/3}(z - z_\Omega)$$

II-1) بما أن: $R(A) = B$

فإن:

$$z_B - z_\Omega = e^{i\pi/3}(z_A - z_\Omega)$$

$$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = e^{i\pi/3}$$

الاستنتاج:

لدينا:

$$\frac{|z_B - z_\Omega|}{|z_A - z_\Omega|} = |e^{i\pi/3}| = 1$$

إذن: $\boxed{\Omega B = \Omega A}$

ولدينا:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right) \equiv \arg(e^{i\pi/3})\ [2\pi] \equiv \boxed{\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$$

وبالتالي: **ΩAB مثلث متساوي الأضلاع**

II-2-أ)

$$M\in(\Gamma) \iff |z - z_A| = |z - z_B| \iff AM = MB$$

إذن M تنتمي إلى واسط $[AB]$.

ومنه **(Γ) هو واسط القطعة $[AB]$**

II-2-ب) نعلم أن:

$$\left|\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right| = |e^{i\pi/3}| = 1$$

$$\iff |z_B - z_\Omega| = |z_A - z_\Omega|$$

إذن: $|z - z_B| = |z - z_A|$

حيث $z = z_\Omega$ أي أن $\Omega(z)\in(\Gamma)$

التمرين 3 :

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}-4(x-1)e^{x}-2$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا :

$f(x)=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}-4xe^{x}+4e^{x}-2$

وبما أن :

$\lim_{x\to-\infty} xe^{2x}=\lim_{x\to-\infty}(xe^{x})e^{x}=0\times0=\boxed{0}$

$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=\lim_{x\to-\infty} e^{x}\times e^{x}=0\times0=\boxed{0}$

$\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$

فإن :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0+0+0+0-2$
$=\boxed{-2}$

2) لدينا :

$xe^{2x}\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{xe^{x}}-\frac{2}{xe^{2x}}\right)$

$=xe^{2x}-\frac{xe^{2x}}{2x}-\frac{4xe^{2x}}{e^{x}}+\frac{4xe^{2x}}{xe^{x}}-\frac{2xe^{2x}}{xe^{2x}}$

$=\left(xe^{2x}-\frac{e^{2x}}{2}\right)-\left(4xe^{x}-4e^{x}\right)-2$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}-4(x-1)e^{x}-2=f(x)$

ومنه :

$f(x)=xe^{2x}\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{xe^{x}}-\frac{2}{xe^{2x}}\right)$

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{xe^{x}}=0$

وبما أن :

$\lim_{x\to+\infty} xe^{2x}=\lim_{x\to+\infty} xe^{x}\times e^{x}=+\infty$

فإن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{xe^{2x}}=0$ اذا :

$\lim_{x\to+\infty} xe^{2x}\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{xe^{x}}-\frac{2}{xe^{2x}}\right)=\text{"}+\infty\times1\text{"}$
$=\boxed{+\infty}$

أي أن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

3) جدول تغيرات f :

3

f دالة قابلة للاشتقاق على IR (لأنها مجموع وجداء دوال قابلة للاشتقاق على IR)

ولدينا :

$f'(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)'e^{2x}+(2x)'e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)-4(x-1)'e^{x}-4(x-1)(e^{x})'$

$=e^{2x}+2\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}-4e^{x}-4(x-1)e^{x}$

$=e^{2x}\left(1+2x-\frac{2}{2}\right)-4e^{x}-4xe^{x}+4e^{x}$

$=2xe^{2x}-4xe^{x}=2xe^{x}(e^{x}-2)$

اذا : $\boxed{f'(x)=2xe^{x}(e^{x}-2)}$

$f'(x)=0 \iff (xe^{x}=0)$ أو $e^{x}-2=0$

$\iff x=0$ أو $e^{x}=0$ أو $e^{x}=2$

$\iff \boxed{x=0 \text{ أو } x=\ln(2)}$ ($e^{x}>0$: ✗)

نستنتج :

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-2	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$4(1-\ln(2))\simeq1,2$	↗	$+\infty$

$f(0)=-\frac{1}{2}+4-2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

$f(\ln(2))=\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)\times4-4(\ln(2)-1)\times2-2$

$=4\ln(2)-2-8\ln(2)+8-2$

$=-4\ln(2)+4=4(1-\ln(2))$

ملاحظة : لتحديد اشارة $e^{x}-2$ نستعمل متفاوتات (نحل متراجحة)

$e^{x}-2\geq0 \iff e^{x}\geq2 \iff x\geq\ln(2)$

Scanné avec CamScanner

4) الفروع اللانهائية:

بجوار $-\infty$:

بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$

فإن المستقيم ذو المعادلة: $y=-2$ مقارب أفقي.

بجوار $+\infty$:

نعلم أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نحسب: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا:

$$\frac{f(x)}{x} = e^{2x}\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^x}+\frac{4}{xe^x}-\frac{2}{xe^{2x}}\right)$$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = "+\infty \times 1" = \boxed{+\infty}$$

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

5) في هذا السؤال نستعمل مبرهنة القيم الوسيطية، لدينا:

f دالة متصلة (لأنها ق ش ك) على $[-2;-1]$.

ولدينا:

$$f(-2) = \left(-2-\tfrac{1}{2}\right)e^{-4} - 4(-3)e^{-2} - 2$$

$$= -\frac{5}{2}\times\frac{4}{225} + 7\times\frac{2}{15} - 2$$

$$= \frac{8}{9} - 2 = \frac{-10}{9} < 0$$

$$f(-1) = \left(-1-\tfrac{1}{2}\right)e^{-2} - 4(-2)e^{-1} - 2$$

$$= \frac{-3}{2}\times\frac{2}{15} + 8\times\frac{4}{11} - 2$$

$$= \frac{149}{55} - 2 = \frac{39}{55} > 0$$

إذن: $f(-2)\times f(-1) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا في المجال $[-2;-1]$ وهذا يعني أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى $[-2;-1]$

$\ln(2)=0{,}7$

$f(0)=1{,}5$

$f(1)=1{,}7$

6) انشاء $(\mathcal{C}_f)$:

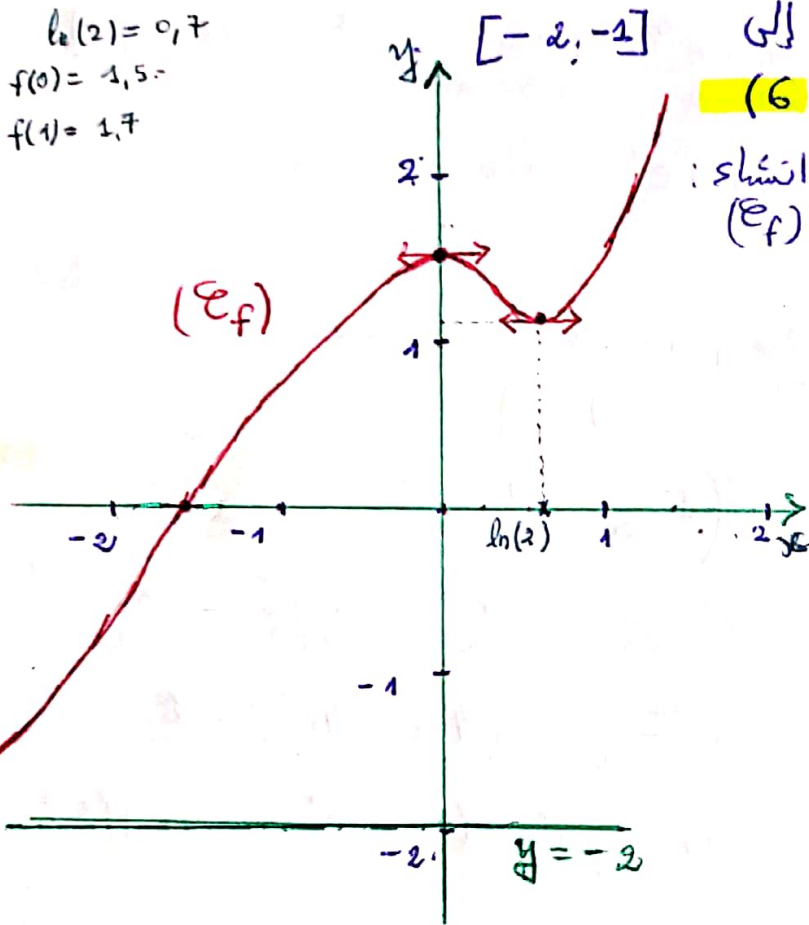
$(\mathcal{C}_f)$

$y=-2$

7) حساب التكامل:

نعلم أن: $f'(x) = 2xe^x(e^x-2)$

إذن: $\frac{1}{2}f'(x) = xe^x(e^x-2)$

ومنه:

$$\int_0^1 xe^x(e^x-2)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 - 2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{7}{2}\right)$$

إذن:

$$\boxed{\int_0^1 xe^x(e^x-2)\,dx = \frac{e^2-7}{4}}$$

★ ★ ★ ★ ★

ثانوية الليمون التأهيلية . ★ نموذج رقم 2 للواجب الثالث ★

مستوى : 2 باك علوم تجريبية . الدورة II [موسم 2020 - 2021]

تمرين 1 : [أسئلة مستقلة]

I الأعداد العقدية :

نعتبر العدد العقدي : $a = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} i$

1) أحسب a^2 ؛ $|a^2|$ ثم $Arg(a^2)$.

2) استنتج معيار وعمدة العدد a ثم أحسب : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

II معادلات ومتراجحات :

1) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

2) حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة :

$$(S) : \begin{cases} 3^{x+y} = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

III حساب التكامل :

1) أحسب مايلي :

$$I_1 = \int_1^2 \left(t^2 - \frac{1}{t}\right)dt \ ; \ I_2 = \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{u}}du \ ; \ I_3 = \int_0^1 3xe^{x^2+3}dx$$

$$I_4 = \int_{-1}^0 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}dx \ ; \ I_5 = \int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^3 dx$$

2) أوجد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}) ; \frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

ثم استنتج حساب : $J = \int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2}dx$

تمرين 2 : [دراسة دالة]

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ f(x) = -1 + 8e^{-x} - 7e^{-2x}$$

1) أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) تحقق أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ f'(x) = \frac{14 - 8e^x}{e^{2x}}$

3) بين أن : $f\left(\ln\left(\frac{7}{4}\right)\right) = \frac{9}{7}$ ثم ضع جدول تغيرات f .

4) ادرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $(-\infty)$.

5) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = 0$ ثم استنتج أفاصيل نقط تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع محور الأفاصيل .

6) حدد معادلة ديكارتية للمماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الأفصول : $x_0 = 0$.

7) أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ مع : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

نأخذ : $\ln(7) = 1,9$ ، $\ln(2) = 0,7$ ونقبل أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها : $\ln\left(\frac{7}{2}\right)$.

8) ليكن $\mathcal{D}$ حيز المستوى المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمين ذي المعادلة ! $x = \ln(7)$ و $x = 0$. أحسب مساحة $\mathcal{A}$ الحيز $\mathcal{D}$.

تصحيح النموذج 2 للواجب 3.

تمرين 1:

I

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\, i$$

1) حساب a^2 :

$$a^2 = \frac{1}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} - 2\times\frac{1}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\, i + \frac{i^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{8+4\sqrt{3}} - \frac{2i}{6-2} - \frac{1}{8-4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right) - \frac{2i}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3})}{4-3} - \frac{i}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{-2\sqrt{3}}{1} - \frac{i}{2} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}$$

حساب $|a^2|$:

$$|a^2| = \left|\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \boxed{1}$$

حساب $Arg(a^2)$:

$$a^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Arg(a^2) \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]}$$

تعليل:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= -\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

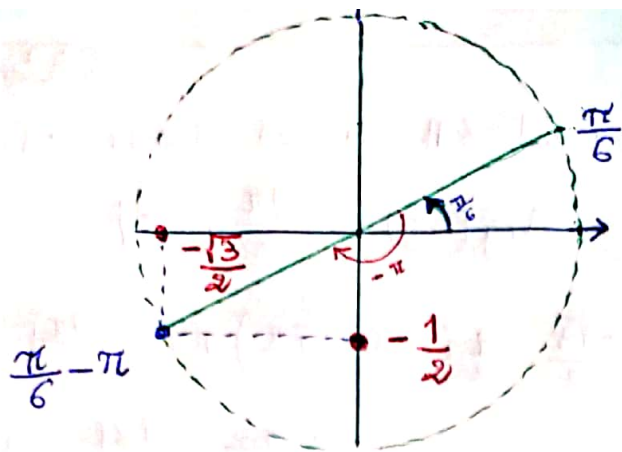
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}-\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\pi\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

أو يمكن استعمال الدائرة المثلثية :

1

$\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$ ، $\frac{\pi}{6}-\pi$ ، $-\pi$

نلاحظ اذا أن :

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}-\pi\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \\ -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \end{cases}$$

2) الاستنتاج :

معيار a :

بما أن : $|a^2| = |a|^2 = 1$

فإن : $\boxed{|a| = 1}$

عمدة العدد a :

نعلم أن : $Arg(a^2) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ، $(k\in\mathbb{Z})$

اذا : $2Arg(a) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ، $(k\in\mathbb{Z})$

أي أن : $\boxed{Arg(a) = -\frac{5\pi}{12} + k\pi}$ ، $(k\in\mathbb{Z})$

نعلم أن : $a = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\, i$

اذا : $\begin{cases} Re(a) > 0 \\ Im(a) < 0 \end{cases}$

اذا a عدد من المرباع رقم 4

(1) (2) (3) (4) ، $\begin{cases} Re(z)>0 \\ Im(z)<0 \end{cases}$

وبما أن $-\frac{5\pi}{12}$ هو أيضا أفصول منحنى يتواجد بنفس المرباع على الدائرة المثلثية

(1) (2) (3) (4) ، $-\frac{5\pi}{12}$

فإن : $\boxed{Arg(a) = -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]}$

2) حساب : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

نعلم أن :

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}i$$

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i}$$

وأن :

$$a = \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

إذن :

$$\begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

ولدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$$

وبالتالي :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}}$$

II معادلات ومتراجحات :

II-1) ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3} \iff 3\times 2^x < 2^x + 1$$

$$\iff 3\times 2^x - 2^x < 1$$

$$\iff (3-1)\,2^x < 1$$

$$\iff 2\times 2^x < 1 \iff 2^{x+1} < 1$$

$$\iff \ln\left(2^{x+1}\right) < \ln(1)$$

$$\iff (x+1)\ln(2) < 0$$

$$\iff x+1 < 0 \iff x < -1$$

$$\iff x \in]-\infty\,;-1[$$

مجموعة الحلول في المجال :

$$\boxed{]-\infty\,;-1[}$$

ملاحظة :

يمكن أيضا اعتماد الكتابة :

$$\mathrm{Arg}(a^2) \equiv \frac{7\pi}{6}\,[2\pi]$$

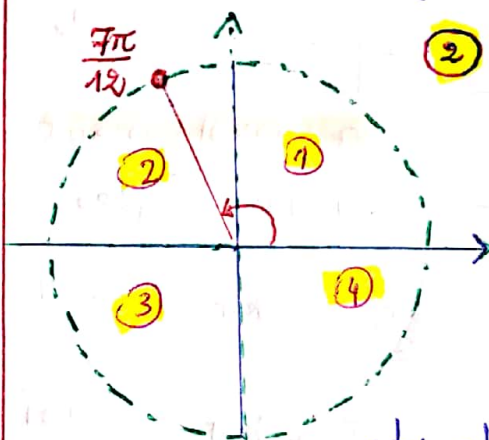
(لأن : $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$)

في هذه الحالة نجد :

$$\mathrm{Arg}(a) = \frac{7\pi}{12}\,[\pi] = \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

لكن اذا قمنا بتمثيل هذا الأفصول المنحنى : $\frac{7\pi}{12}$ على الدائرة المثلثية ، فسنجده في المربع ②

$\frac{7\pi}{12}$ ② ① ③ ④

وبالتالي ينبغي تغيير قيمة العمدة للرجوع الى المربع رقم ④ حيث تتواجد الأعداد $z \in \mathbb{C}$ التي تحقق الشرط :

" $\mathrm{Re}(z) > 0$ و $\mathrm{Im}(z) < 0$ "

لدينا : $\mathrm{Arg}(a) = \frac{7\pi}{12} + k\pi$

نأخذ مثلا : $k = 1$ أو $k = -1$

(القيمة $k=-1$ أفضل لأنها تمكننا من الاستنتاج الأخير بسهولة)

إذن :

$$\mathrm{Arg}(a) \equiv \frac{7\pi}{12} - \pi\,[2\pi]$$

$$\boxed{\mathrm{Arg}(a) \equiv \frac{-5\pi}{12}\,[2\pi]}$$

انتهت الملاحظة

تتمة التصحيح :

II-2) حل النظمة :

$$(S) : \begin{cases} 3^{x+y} = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

نضع: $a = 3^x$ و $b = 3^y$

(نلاحظ أن: $a>0$ و $b>0$)

اذن:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 9 \\ a+b = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

(لأن: $3^{x+y} = 3^x \times 3^y = ab$)

و بالتالي: $\boxed{b = 4\sqrt{3} - a}$ ثم نعوض:

$$ab = 9 \Leftrightarrow a(4\sqrt{3} - a) = 9$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}\,a - a^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4\sqrt{3}\,a + 9 = 0$$

$$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4\times 9$$
$$= 4^2 \times 3 - 4\times 9 = 4\times 3(4-3)$$
$$= 12 > 0$$

حلان:

$$a_1 = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

و

$$a_2 = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

اذن قيمتان للعدد a (لأن $a>0$)

$a = \sqrt{3}$ أو $a = 3\sqrt{3}$

أي أن:

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 4\sqrt{3} - a \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a = 3\sqrt{3} \\ b = 4\sqrt{3} - a \end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 3\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a = 3\sqrt{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$$

ونعلم أن: $a = 3^x$ و $b = 3^y$

اذن:

$$\begin{cases} 3^x = \sqrt{3} = 3^{1/2} \\ 3^y = 3^1 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

3

أو:

$$\begin{cases} 3^x = 3^{\frac{3}{2}} \\ 3^y = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

اذن حل النظمة S هو المجموعة:

$$\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}$$

> ملاحظة: يمكن التحقق من هذا الحل بتعويض x و y في S.

III حساب التكامل:

III-1) حساب I_1:

$$I_1 = \int_1^2 \left(t^2 - \frac{1}{t}\right)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \ln|t|\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \ln(2)\right) - \left(\frac{1}{3} - \ln(1)\right)$$

$$= \frac{8}{3} - \ln(2) - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{7}{3} - \ln(2)}$$

حساب I_2:

$$I_2 = \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du = \int_1^8 u^{-\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \int_1^8 u'\,u^{-\frac{1}{3}}\,du \qquad (u' = 1)$$

$$= \left[\frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_1^8 = \left[\frac{3}{2}\times u^{\frac{2}{3}}\right]_1^8$$

$$= \frac{3}{2}\,8^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\,1^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}(2^3)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\times 2^2 - \frac{3}{2} = \frac{12-3}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

حساب I_3:

$$I_3 = \int_0^1 3x\,e^{x^2+3}\,dx$$

لدينا:

$$(x^2+3)' = 2x = \frac{2}{3}(3x)$$

اذن:

$$3x = \frac{3}{2}(x^2+3)'$$

Scanné avec CamScanner

ومنه: $I_3 = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2+3)' e^{x^2+3}\,dx$

$= \frac{3}{2}\int_0^1 u'(x)\, e^{u(x)}\,dx$

حيث: $u(x) = x^2+3$

$\Rightarrow I_3 = \frac{3}{2}\left[e^{u(x)}\right]_0^1$

$= \frac{3}{2}\left(e^{u(1)} - e^{u(0)}\right)$

وبالتالي: $I_3 = \boxed{\frac{3}{2}\left(e^4 - e^3\right)}$

حساب I_4:

$I_4 = \int_{-1}^0 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}\,dx$

$= \left[\ln|e^x + e^{-x}|\right]_{-1}^0$

$= \ln(2) - \ln(e^{-1} + e)$

$= \ln\left(\frac{2}{e^{-1}+e}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{2e}{1+e^2}\right)}$

حساب I_5:

$I_5 = \int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^3\,dx$

نضع: $v(x) = x^2 - 4x + 1$

لدينا: $v'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

اذن: $(x-2) = \frac{1}{2}v'(x)$

ومنه: $I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2} v'(x)\, v^3(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)\, v^3(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{v^4(x)}{4}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{v^4(1)}{4} - \frac{v^4(0)}{4}\right)$

$= \frac{1}{8}\left(v^4(1) - v^4(0)\right)$

ولدينا: $v^4(1) = (1-4+1)^4 = 16$

$v^4(0) = (1)^4 = 1$

اذن: $I_5 = \frac{1}{8}(16-1) = \boxed{\frac{15}{8}}$

III-2) تحديد الأعداد a و b و c:

لدينا: $a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

$= \frac{a(x-1)+b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

$= \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

وهذا يستلزم تساوي البسطين:

$a(x^2-2x+1) + bx - b + c = x^2$

$\Rightarrow ax^2 + (b-2a)x + a - b + c = x^2$

حدوديتان متساويتان يستلزم معاملاتهما أعداد متساوية، إذن:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2a = 2 \\ c = b - a = 1 \end{cases}$$

وبالتالي لكل x من $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

الاستنتاج: حساب J:

$J = \int_{-3}^0 \frac{x^2}{(1-x)^2}\,dx = \int_{-3}^0 \left(1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$

$= \left[x + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right]_{-3}^0$

$= \left(0 + 2\ln(1) - \frac{1}{-1}\right) - \left(-3 + 2\ln(4) - \frac{1}{-4}\right)$

$= 1 + 3 - \frac{1}{4} - 2\ln(4)$

$= 4 - \frac{1}{4} - 2\ln(4) = \boxed{\frac{15}{4} - 2\ln(4)}$

تمرين 2 :

$$f(x) = -1 + 8e^{-x} - 7e^{-2x}$$

1) حساب $\lim\limits_{+\infty} f$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \boxed{0}$

و : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 = 0^2 = \boxed{0}$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 + 0 = \boxed{-1}$

حساب : $\lim\limits_{-\infty} f$.

$$f(x) = -1 + \frac{8}{e^x} - \frac{7}{e^{2x}} = \frac{-e^{2x} + 8e^x - 7}{e^{2x}}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x \times e^x = 0^+$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = "\frac{-7}{0^+}" = \boxed{-\infty}$

2) التحقق :

f ق.ش على IR لأنها مجموع دوال ق.ش على IR . ولدينا :

$$f'(x) = 8(e^{-x})' - 7(e^{-2x})'$$
$$= -8e^{-x} - 7(-2)e^{-2x}$$
$$= 14e^{-2x} - 8e^{-x} = e^{-2x}\left(14 - 8\frac{e^{-x}}{e^{-2x}}\right)$$
$$= e^{-2x}(14 - 8e^x)$$

اذا : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x) = \frac{14 - 8e^x}{e^{2x}}}$

3)

$$f\left(\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right) = -1 + 8e^{-\ln(\frac{7}{4})} - 7e^{-2\ln(\frac{7}{4})}$$
$$= -1 + 8e^{\ln(\frac{4}{7})} - 7e^{2\ln(\frac{4}{7})}$$
$$= -1 + 8\times\frac{4}{7} - 7e^{\ln(\frac{16}{49})}$$
$$= -1 + \frac{32}{7} - 7\times\frac{16}{49} = -1 + \frac{32}{7} - \frac{16}{7}$$

$$\Rightarrow f\left(\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)\right) = \frac{32 - 23}{7} = \boxed{\frac{9}{7}}$$

جدول تغيرات f :

اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة : $14 - 8e^x$

$$14 - 8e^x = 0 \iff x = \ln\left(\tfrac{7}{4}\right)$$

و : $14 - 8e^x > 0 \iff -e^x > \frac{-7}{4}$

$$\iff x < \ln\left(\tfrac{7}{4}\right)$$

اذن :

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{7}{4}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{9}{7}$	↘	-1

4) الفرع اللانهائي بجوار $(-\infty)$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

و : $\frac{f(x)}{x} = \frac{-e^{2x} + 8e^x - 7}{xe^{2x}}$

وحيث أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x)\, x$

$$= 0^- \times 0^+ = 0^-$$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = "\frac{-7}{0^-}" = \boxed{+\infty}$

اذن :

(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $(-\infty)$

5) حل المعادلة : $f(x) = 0$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 0 \iff -1 + 8e^{-x} - 7(e^{-x})^2 = 0$$
$$\iff -1 + 8y - 7y^2 = 0 ;\ (y = e^{-x})$$
$$\iff 7y^2 - 8y + 1 = 0 \quad \text{و} \quad y = e^{-x}$$
$$\Delta = 64 - 28 = 36 > 0$$

حلاه :

$$y_1 = \frac{8-6}{2(7)} = \frac{2}{2.7} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

$$y_2 = \frac{8+6}{14} = \frac{14}{14} = \boxed{1}$$

اذن:

$y = \frac{1}{7}$ أو $y = 1$

$e^{-x} = \frac{1}{7}$ أو $e^{-x} = 1$

$-x = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$ أو $-x = \ln(1)$

$x = -\ln\left(\frac{1}{7}\right)$ أو $-x = 0$

$x = \ln(7)$ أو $x = 0$

مجموعة الحلول هي: $\{0 ; \ln(7)\}$

الاستنتاج:

بما أن 0 حل للمعادلة $f(x)=0$ فإن $f(0)=0$ أي أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الأفاصيل في النقطة ذات الاحداثيات $O(0,0)$ (أصل المعلم)

لدينا أيضا: $f(\ln(7)) = 0$

اذن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الأفاصيل في النقطة ذات الاحداثيات $(\ln(7);0)$

أفاصيل نقط التقاطع اذن هي: $x_1 = \ln(7)$ و $x_0 = 0$

6) ليكن (Δ) هو المماس لـ: $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 0$

نعلم أن: $(\Delta): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

نعلم أن: $f(0) = 0$

ولدينا: $f'(x) = \frac{14 - 8e^{x}}{e^{2x}}$

اذن: $f'(0) = \frac{14-8}{1} = 6$

6 وبالتالي معادلة ديكارتية لـ: (Δ) هي:

$$(\Delta) : y = 6x$$

7) انشاء $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ):

نرسم مماسا أفقيا في النقطة ذات الاحداثيات: $\left(\ln\left(\frac{7}{4}\right) ; \frac{9}{7}\right)$ وذلك لأن: $f'\left(\ln\left(\frac{7}{4}\right)\right) = 0$

8) مساحة الحيز $\mathcal{D}$ هي:

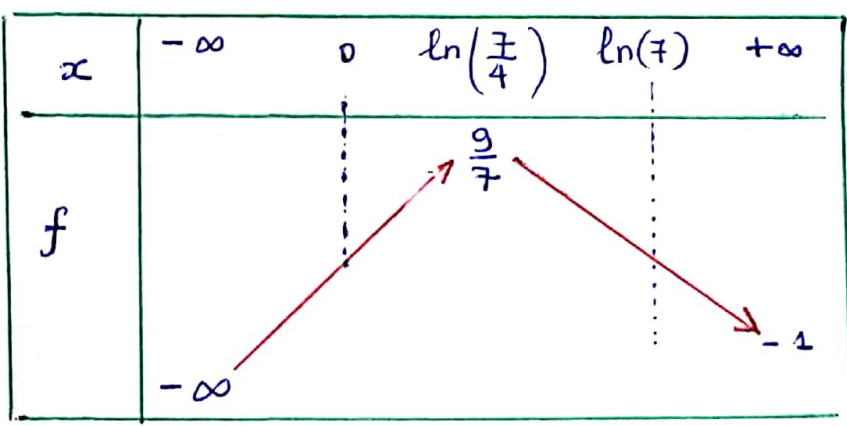
$$\mathcal{A} = \left(\int_0^{\ln(7)} |f(x)|\, dx\right) u.A$$

حيث: $u.A = 2cm \times 2cm = \boxed{4\,cm^2}$

لإزالة القيمة المطلقة نبدأ بدراسة إشارة $f(x)$:

يمكن الاعتماد على جدول تغيرات الدالة f:

7

نقوم بوضع العددين 0 و $\ln(7)$ في جدول التغيرات (لأن التكامل من 0 إلى $\ln(7)$)

نقوم بتقسيم المجال:

$[0; \ln(7)] = [0; \ln(\frac{7}{4})] \cup [\ln(\frac{7}{4}); \ln(7)]$

على المجال الأول: $I = [0; \ln(\frac{7}{4})]$

f تزايدية قطعا إذن:

$(\forall x \in I); \quad f(0) \leq f(x) \leq f(\ln(\frac{7}{4}))$

$\Rightarrow (\forall x \in I); \quad 0 \leq f(x)$

" لأن: $f(0) = 0$ "

على المجال: $J = [\ln(\frac{7}{4}); \ln(7)]$

لدينا:

$(\forall x \in J): \quad f(\ln(\frac{7}{4})) \geq f(x) \geq f(\ln(7))$

لأن f دالة تناقصية في هذه الحالة:

ونعلم أن: $f(\ln(7)) = 0$

وبالتالي:

$(\forall x \in J), \quad f(x) \geq 0$

خلاصة:

$\forall x \in I \cup J \; ; \; f(x) \geq 0$

أي أن f موجبة على $[0; \ln(7)]$

ومنه: $\forall x \in [0; \ln(7)]; |f(x)| = f(x)$

إذن:

$$\int_0^{\ln(7)} |f(x)|\,dx = \int_0^{\ln(7)} \left(-1 + 8e^{-x} - 7e^{-2x}\right)dx$$

$$= \left[-x - 8e^{-x} + \frac{7}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln(7)}$$

$$= -\ln(7) - 8e^{-\ln(7)} + \frac{7}{2}e^{-2\ln(7)} - \left(0 - 8 + \frac{7}{2}\right)$$

$$= -\ln(7) - \frac{8}{7} + \frac{7}{2} \times \frac{1}{49} + 8 - \frac{7}{2}$$

$$= -\ln(7) - \frac{8}{7} + \frac{1}{14} + 8 - \frac{7}{2}$$

$$= -\ln(7) + \frac{-16+1-49}{14} + 8$$

$$= -\ln(7) + \frac{-64}{14} + 8$$

$$= -\ln(7) + \frac{24}{7} \simeq 1,48$$

إذن:

$$\mathcal{A} = 1,48 \text{ u.A} = 1,48 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 5,92 \text{ cm}^2}$$

* * * *

[2020/2021] نموذج 3 للواجب الثالث — الدورة الثانية — ثانوية الليمون التأهيلية. 2 باك علوم.

تمرين 1 : (الأعداد العقدية)

نعتبر العددين العقديين : $a=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $b=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ نعتبر النقط : $E(4\sqrt{3})$ ، $F(ab)$ و $G(ab+4\sqrt{3})$.

1) حدد قياسا للزاوية : $(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF})$ ثم بين أن الرباعي $OFGE$ مربع.

2) نضع : $Z=\frac{a}{2}+\frac{\overline{b}}{2\sqrt{3}}$.

2-أ) حدد الكتابة الجبرية والمثلثية للعدد Z.

2-ب) إستنتج : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3) بين أن : $\frac{\overline{a}b+a\overline{b}}{|b|^2}=-1$

تمرين 2 : (دراسة دالة)

I) الجزء الأول : نعتبر الدالة g : $(\forall x\in\mathbb{R}):\ g(x)=(4-2x)e^{x}-4$

I-1) ضع جدول تغيرات g

I-2) بين أن $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما منعدم والثاني α يحقق $1{,}5<\alpha<1{,}6$.

I-3) استنتج اشارة $g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II) الجزء الثاني : نعتبر الدالة f : $(\forall x\in\mathbb{R}):\ f(x)=\frac{2x-2}{e^{x}-2x}$

ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

II-1) أدرس الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

II-2) بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=\frac{g(x)}{(e^{x}-2x)^2}$

II-3) ضع جدول تغيرات الدالة f.

II-4) أحسب $f(1)$ ثم حدد إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

II-5) بين أن : $f(\alpha)=-1+\frac{1}{\alpha-1}$ واستنتج تأطيرا للعدد $f(\alpha)$.

II-6) أنشئ في نفس المعلم $(\mathscr{C})$ والمقاربات.

II-7) ليكن m من $\mathbb{R}$. حدد حسب قيم m عدد حلول المعادلة :

$$2x-2=(e^{x}-2x)m$$

II-8) نضع : $I=\int_1^{\ln(2)}xe^{x}\,dx$ و $J=\int_1^{\ln(2)}(e^{x}-1)\,dx$

8-أ) باستعمال مكاملة بأجزاء بين أن : $I=2\ln(2)-2$.

8-ب) تحقق أن : $\int_1^{\ln(2)}g(x)\,dx=4J-2I$

8-ج) بين أن : $J=3-e-\ln(2)$ ثم استنتج قيمة $\int_1^{\ln(2)}g(x)\,dx$.

تصحيح النموذج رقم 3

التمرين 1 :

حيث : $E(4\sqrt{3})$; $F(ab)$; $G(ab+4\sqrt{3})$

$b = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $a = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1) قياس $(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}})$:

نعلم أن :

$$(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \equiv \arg\left(\frac{z_F}{z_E}\right) [2\pi]$$

وحيث أن :

$$\frac{z_F}{z_E} = \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

فإن : $\arg\left(\frac{z_F}{z_E}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

إذن : احد قياسات $(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}})$ هو : $\frac{\pi}{2}$.

طبيعة الرباعي $OFGE$:

لدينا : $z_G = ab + 4\sqrt{3} = z_F + z_E$

$\Rightarrow z_G - z_E = z_F$

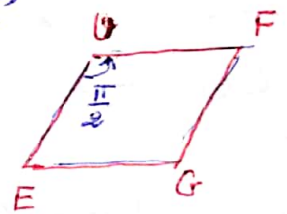
$\Rightarrow z_G - z_E = z_F - z_O$

$\Rightarrow aff(\overrightarrow{EG}) = aff(\overrightarrow{OF})$

$\Rightarrow \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{OF}$

اذن الرباعي $OFGE$ متوازي أضلاع

وبما أن له زاوية قائمة (في النقطة O)

فإنه مستطيل :

ولدينا : $OF = |z_F| = |ab| = 4\sqrt{3}$

$OE = |z_E| = 4\sqrt{3}$

اذن الرباعي $OFGE$ عبارة عن مستطيل له ضلعان متتابعان متقايسان

وبالتالي فهو مربع .

2) $z = \frac{a}{2} + \frac{\bar{b}}{2\sqrt{3}}$

2 - أ) الكتابة الجبرية للعدد z :

لدينا : $z = \frac{2}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{i\pi}{6}}$

1 $\Rightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\pi/6}$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$$z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

الكتابة المثلثية للعدد z :

طريقة 1 :

نبدأ بتحديد الكتابة المثلثية العدد z^2 ثم نستنتج كتابة z :

لدينا :

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)i + \left(i\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}(2)i - \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}}{4} + i$$

$$= -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \left[2 ; \frac{5\pi}{6}\right]$$

نضع : $z = [r ; \theta]$

لدينا : $z^2 = \left[2 ; \frac{5\pi}{6}\right]$

$\Leftrightarrow [r^2 ; 2\theta] = \left[2 ; \frac{5\pi}{6}\right]$

$\Leftrightarrow \left(r^2 = 2 \text{ و } 2\theta = \frac{5\pi}{6}\right)$

اذا : $\left(\theta = \frac{5\pi}{12} [2\pi] \text{ و } r = \sqrt{2}\right)$

ومنه :

$$z = \left[\sqrt{2} ; \frac{5\pi}{12}\right]$$

طريقة 2 : نستعمل العلاقة :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right)$$

لدينا : $z = e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\frac{\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{2\times 6} = \boxed{\frac{5\pi}{12}}$$

نعمل z ب : $e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$$z = e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{12}\right)}\right)$$

$$= e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{3\pi}{12}} + e^{-i\frac{3\pi}{12}}\right)$$

$$= e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

ولدينا حسب علاقة أولير :

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن :

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} = \boxed{\left[\sqrt{2} ; \frac{5\pi}{12}\right]}$$

2 - ب)

الاستنتاج : لدينا مما سبق:

$$\begin{cases} z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) \\ z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

إذن :

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

3) نبين أن : $\frac{\bar{a} b + a\bar{b}}{|b|^2} = -1$

نعلم أن : $|b| = \sqrt{b\bar{b}}$

إذن : $|b|^2 = b\times\bar{b}$

ومنه :

$$\frac{\bar{a} b + a\bar{b}}{|b|^2} = \frac{\bar{a} b}{b\bar{b}} + \frac{a\bar{b}}{b\bar{b}} = \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{a}{b}$$

$$= 2Re\left(\frac{a}{b}\right)$$

تذكير: $z+\bar{z} = 2Re(z)$

لدينا :

$$\frac{a}{b} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

إذن :

$$2Re\left(\frac{a}{b}\right) = 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

وبالتالي :

$$\boxed{\frac{\bar{a} b + a\bar{b}}{|b|^2} = -1}$$

تمرين 2 :

I الجزء الأول:

$$g(x) = (4-2x)e^x - 4$$

I - 1) g دالة ق.ش على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع وجداء دوال ق.ش على $\mathbb{R}$.

ولدينا :

$$g'(x) = (4-2x)'e^x + (4-2x)(e^x)'$$

$$= -2e^x + (4-2x)e^x$$

$$= (-2+4-2x)e^x$$

$$= 2(1-x)e^x$$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x)$

إذن :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	-4	$\nearrow$	$2e-4$	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 2e-4 = 2(e-2) \simeq 2\times 0{,}7 = 1{,}4$

(لأن: $e \simeq 2{,}7$)

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 4e^x - 2xe^x - 4 = \boxed{-4}$

لأن: $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (4-2x)e^x - 4 = \boxed{-\infty}$

لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} (4-2x) = -\infty$

I - 2) لدينا: $g(0) = 4e^0 - 4 = 4-4 = 0$

إذن: $\boxed{0 \text{ حل للمعادلة } g(x)=0}$

g دالة متصلة (لأنها ق.ش) على المجال $[1,+\infty[$ وتناقصية، باستخدام جدول التغيرات نكتب:

$g([1;+\infty[) =]-\infty; 2e-4]$

ولدينا: $2e-4>0$ إذن: $0 \in]-\infty; 2e-4]$ أي أن:

$0 \in g([1,+\infty[)$

ومنه: 0 عبارة عن صورة لعدد α ينتمي إلى المجال $[1,+\infty[$ (مبرهنة القيم الوسيطية)

أي أن: $\exists \alpha \in [1,+\infty[: 0 = f(\alpha)$

نبين أن: $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$

3) (نحتاج إلى استخدام آلة حاسبة):

$g(1{,}5) = (4-3)e^{1{,}5} - 4 = e^{1{,}5} - 4 = 0{,}48 > 0$

$g(1{,}6) = (4-3{,}2)e^{1{,}6} - 4$

$= 0{,}8e^{1{,}6} - 4 = -0{,}037 < 0$

إذن: $g(1{,}5)\times g(1{,}6) < 0$

ومنه $\boxed{1{,}5 < \alpha < 1{,}6}$

I - 3) استنتاج إشارة $g(x)$

بما أن g تنعدم في α و 0 وباستعمال جدول التغيرات نستنتج:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

II الجزء الثاني:

لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$

ملاحظة: تم تعريف f على $\mathbb{R}$ في التمرين وهذا معناه: $e^x - 2x \neq 0$ من خلال المعطيات.

II - 1) الفروع اللانهائية:

بجوار $-\infty$:

لدينا: $f(x) = \dfrac{x\left(2 - \frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x} - 2\right)} = \dfrac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x} - 2}$

وبما أن: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

و $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

فإن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

إذن المستقيم $y=-1$ مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2} = "\frac{2}{+\infty}" = \boxed{0}$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

إذن (C_f) يقبل فرعا لانهائيا مقاربه الأفقي هو المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (محور الأفاصيل) بجوار $+\infty$.

II - 2) الدالة f ق.ش على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = \left(\frac{2x-2}{e^x-2x}\right)'$$

$$= \frac{2(e^x-2x)-(2x-2)(e^x-2)}{(e^x-2x)^2}$$

$$= \frac{2e^x-4x-2xe^x+4x+2e^x-4}{(e^x-2x)^2}$$

$$= \frac{(2-2x+2)e^x-4}{(e^x-2x)^2} = \frac{(4-2x)e^x-4}{(e^x-2x)^2}$$

إذن:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$$

II - 3) جدول تغيرات f.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة البسط $g(x)$ لأن $(e^x-2x)^2 \geq 0$

4 وحسب السؤال I - 3) نجد:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	↘	-2	↗	$f(\alpha)$	↘	0

$f(0) = \frac{-2}{1} = -2$

II - 4) حساب $f(1)$:

$f(1) = \frac{0}{e-2} = \boxed{0}$

إشارة $f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$:

من جدول التغيرات نجد:

f سالبة على المجال $]-\infty, 0]$ ولاتنعدم

لأن: $f(]-\infty, 0]) = [-2, -1[$

f موجبة على المجال $[\alpha, +\infty[$ ولا تنعدم على هذا المجال ($\alpha \neq 1$ لأن)

لأن: $f([\alpha+\infty[) =]0; f(\alpha)]$

إشارة f على المجال $[0, \alpha]$:

f تنعدم في 1 و $1 \in [0, \alpha]$:

وبما أن f تزايدية على المجال $[0, \alpha]$

فإن:

x	0		1		α
f		$-$	0	$+$	

خلاصة:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

(II - 5

لدينا: $-1+\frac{1}{\alpha-1} = \frac{-\alpha+1+1}{\alpha-1}$

$= \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ (*)

من جهة أخرى نعلم أن: $g(\alpha)=0$

$(4-2\alpha)e^{\alpha} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2(2-\alpha)e^{\alpha} = 4$

$\Leftrightarrow (2-\alpha)e^{\alpha} = 2$

ولدينا: $f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha}$

$= \frac{(2\alpha-2)(2-\alpha)}{(2-\alpha)e^{\alpha} - 2\alpha(2-\alpha)}$

"ضربنا البسط والمقام في $(2-\alpha)$"

$f(\alpha) = \frac{2(\alpha-1)(2-\alpha)}{2-2\alpha(2-\alpha)}$ لأن: $\left((2-\alpha)e^{\alpha} = 2\right)$

$f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{\alpha^2-2\alpha+1}$

$f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ (**)

من (*) و (**) نستنتج أن:

$$f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

طريقة أخرى:

نستعمل البرهان بالتكافؤ:

العبارة: $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$

$\Leftrightarrow \frac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha} = \frac{-\alpha+2}{\alpha-1}$

$\Leftrightarrow (2\alpha-2)(\alpha-1) = (-\alpha+2)(e^{\alpha}-2\alpha)$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2-4\alpha+2 = -\alpha e^{\alpha}+2\alpha^2+2e^{\alpha}-4\alpha$

$\Leftrightarrow 2 = -\alpha e^{\alpha}+2e^{\alpha}$ (نضرب الطرفين في 2)

$\Leftrightarrow 4 = 4e^{\alpha}-2\alpha e^{\alpha}$

$\Leftrightarrow 4 = (4-2\alpha)e^{\alpha}$

5

$\Leftrightarrow (4-2\alpha)e^{\alpha} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow g(\alpha) = 0$

وهذه العبارة الأخيرة صحيحة.

إذن العبارة الأولى صحيحة:

أي أن:

$$f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

الاستنتاج: نؤطر $f(\alpha)$:

نعلم أن: $1,5 < \alpha < 1,6$

إذن: $0,5 < \alpha-1 < 0,6$ ومنه: $\frac{5}{10} < \alpha-1 < \frac{6}{10}$

أي: $\frac{1}{2} < \alpha-1 < \frac{3}{5}$

إذن: $\frac{5}{3} < \frac{1}{\alpha-1} < 2$

وبالتالي: $\frac{2}{3} < -1+\frac{1}{\alpha-1} < 1$

أي أن: $\frac{2}{3} < f(\alpha) < 1$

(II - 6 الإنشاء:

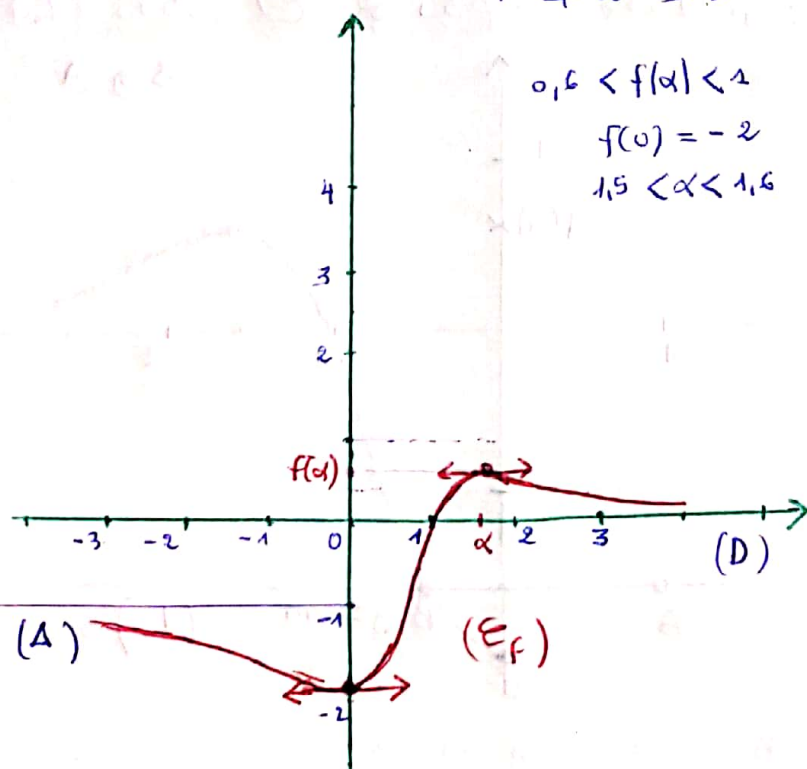
ننشئ $(\mathcal{C}_f)$

المقارب الأفقي $(\Delta): y=-1$ بجوار $-\infty$

محور الأفاصيل $(D): y=0$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

$0,6 < f(\alpha) < 1$

$f(0) = -2$

$1,5 < \alpha < 1,6$

(II - 7 حل المعادلة: $2x-2 = (e^x-2x)m$

المعادلة تكافئ:

$\frac{2x-2}{e^x-2x} = m$

$\Leftrightarrow f(x) = m$

لدينا من خلال التمثيل البياني للدالة f :

$$f(\mathbb{R}) = [-2 ; f(\alpha)]$$

لأن:
- -2 قيمة دنيا
- $f(\alpha)$ قيمة قصوى
- f متصلة على $\mathbb{R}$

و بالتالي:

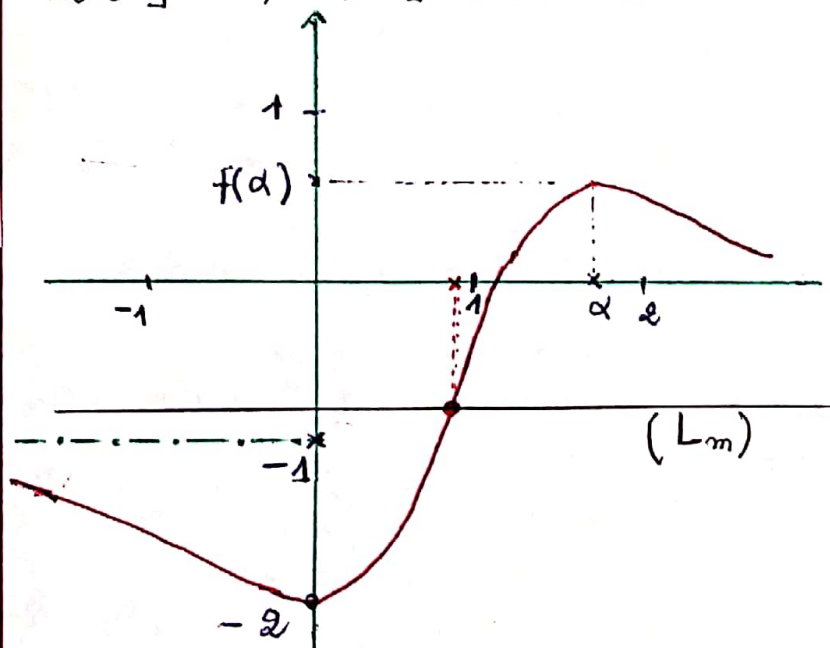
$$\begin{cases} f(\mathbb{R}) = [-2; f(\alpha)] \\ f(x) = m \end{cases}$$

ومنه: اذا كان: $m \notin [-2; f(\alpha)]$ فإن المعادلة $f(x) = m$ ليس لها حل

نفترض أن $m \in [-2; f(\alpha)]$. نرسم مستقيما أفقيا معادلته: $(L_m) : y = m$

نلاحظ أن:

(L_m) يقطع (C) في نقطة وحيدة اذا كان: $m \in [-1; 0] \cup \{-2; f(\alpha)\}$

(L_m) يقطع (C) في نقطتين مختلفتين اذا كان: $m \in]-2; -1[\cup]0; f(\alpha)[$

خلاصة: نلخص عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$ وفق الجدول التالي:

6

عدد الحلول	قيم العدد m
0	$m \in]-\infty; -2[\cup]f(\alpha); +\infty[$
1	$m \in [-1; 0] \cup \{-2; f(\alpha)\}$
2	$m \in]-2; -1[\cup]0; f(\alpha)[$

4 ملاحظة: يمكن الاكتفاء برسم هذا الجدول عند الاجابة عن السؤال دون كتابة الشرح السابق.

II-8)

8-أ) حساب: $I = \int_1^{\ln(2)} x e^x \, dx$

مكاملة بأجزاء:

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$I = [x e^x]_1^{\ln(2)} - \int_1^{\ln(2)} e^x \, dx$$

$$= 2\ln(2) - e - [e^x]_1^{\ln(2)}$$

$$= 2\ln(2) - e - 2 + e = \boxed{2\ln(e) - 2}$$

8-ب) التحقق:

$$\int_1^{\ln(2)} g(x)\,dx = \int_1^{\ln(2)} (4e^x - 4 - 2xe^x)\,dx$$

$$= 4\int_1^{\ln(2)} (e^x - 1)\,dx - 2\int_1^{\ln(2)} x e^x \, dx = 4J - 2I$$

8-ج)

$$J = \int_1^{\ln(2)} (e^x - 1)\,dx$$

$$= [e^x - x]_1^{\ln(2)} = 2 - \ln(2) - e + 1$$

$$= \boxed{3 - e - \ln(2)}$$

الاستنتاج:

$$\int_1^{\ln(2)} g(x)\,dx = 4J - 2I$$

$$= 4(3 - e - \ln(2)) - 2(2\ln(2) - 2)$$

$$= 12 - 4e - 4\ln(2) - 4\ln(2) + 4$$

$$= \boxed{16 - 4e - 8\ln(2)}$$

* * * *

ثانوية الليمون
2 باك علوم

نموذج 4 للواجب الثالث

الدورة الثانية
موسم [20-21]

التمرين الأول :

نضع لكل z من $\mathbb{C}^*$: $U(z) = \frac{z^2+4i}{z}$

ونعتبر العددين العقديين : $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ و $z_2 = \sqrt{3}+i$.

1) تحقق : $U(z_1) = U(z_2) = (1+\sqrt{3})(1+i)$

2) نضع : $t = 2e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ، أكتب $U(t)$ على شكله المثلثي .

3) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ نعتبر النقطتين : $A(z_1)$ و $B(z_2)$.

3-أ) بين أن OAB متساوي الساقين في O .

3-ب) حدد قياسا للزاوية : $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$.

التمرين الثاني : الجزء الأول [I] :

لتكن g الدالة : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = e^{2x} - 2x - 1$

I-1) أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات g .

I-2) إستنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) \geqslant 0$

وأن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \; e^{2x} - 2x \geqslant 1$

[II] الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \quad f(x) = \frac{x}{e^{2x} - 2x}$

II-1) بين أن : $D_f = \mathbb{R}$.

II-2-أ) بين أن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

II-2-ب) تحقق أن : $f(x) = \frac{1}{2\left(\frac{e^{2x}}{2x} - 1\right)}$ ثم أحسب : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ واعط تأويلا هندسيا .

II-3) بين أن : $f'(x) = \frac{(1-2x)e^{2x}}{(e^{2x} - 2x)^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ ثم ضع جدول تغيرات f .

II-4) أكتب معادلة المماس لـ : $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 0$.

II-5-أ) تحقق أن : $f(x) - x = \frac{-x\,g(x)}{e^{2x} - 2x}$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R})$

II-5-ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم : $(\Delta) : y = x$

II-6) أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) في نفس المعلم . (نأخذ $\frac{1}{2(e-1)} = 0{,}3$)

التمرين الثالث :

1) تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$

2) بين أن : $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = -\frac{1}{2} + \ln(2)$

3) بإستعمال مكاملة بأجزاء بين أن :

$$\int_0^1 x \ln(1+x)\,dx = \frac{1}{4}$$

* * * * *

تصحيح نموذج 4 للواجب 3

التمرين الأول:

$$u(z)=\frac{z^2+4i}{z}\ ;\ (z\neq 0)$$

1) التحقق:

لدينا: $z_1=1+i\sqrt{3}$ و $u(z)=z+\frac{4i}{z}$

اذن:

$$u(z_1)=1+i\sqrt{3}+\frac{4i}{1+i\sqrt{3}}$$

$$=1+i\sqrt{3}+\frac{4i(1-i\sqrt{3})}{1+3}$$

$$=1+i\sqrt{3}+i(1-i\sqrt{3})=1+i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}$$

$$=1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})=\boxed{(1+\sqrt{3})(1+i)}$$

ولدينا: $z_2=\sqrt{3}+i$

اذن:

$$u(z_2)=\sqrt{3}+i+\frac{4i}{\sqrt{3}+i}$$

$$=\sqrt{3}+i+\frac{4i(\sqrt{3}-i)}{3+1}=\sqrt{3}+i+\frac{4i}{4}(\sqrt{3}-i)$$

$$=\sqrt{3}+i+i(\sqrt{3}-i)=\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}+1$$

$$=\boxed{(\sqrt{3}+1)(1+i)}$$

وبالتالي:

$$u(z_1)=u(z_2)=(1+\sqrt{3})(1+i)$$

2) ليكن $t=2e^{-i\frac{\pi}{12}}$ لدينا:

$$t^2=2^2\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^2=4e^{-i\frac{\pi}{12}\times 2}=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

اذن:

$$u(t)=\frac{t^2+4i}{t}=\frac{4e^{-i\frac{\pi}{6}}+4i}{2e^{-i\frac{\pi}{12}}}$$

$$=2\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}+i\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+i\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)e^{i\frac{\pi}{12}}=2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

اذن:

$$\boxed{u(t)=\left[2\,;\frac{\pi}{4}\right]}$$

3 - أ) يكفي أن نبين أن: $OA=OB$

حيث: $OA=|z_1|$ و $OB=|z_2|$

[1] لدينا:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$$

$$=\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{3+1}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

اذن:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

ومنه: $|z_1|=|z_2|$ أي أن $\boxed{OA=OB}$

3 - ب) تحديد قياس الزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}})$:

لدينا:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

وبما أن OAB مثلث متساوي الساقين

فيمكن اعتماد الشكل الآتي

ليكن α هو أحد قياسات $(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}})$

(يمكن اعتبار α هو القياس الرئيسي)

نعلم أن:

$$\alpha+\frac{\pi}{6}+\alpha=\pi$$

(لأن مجموع قياسات زوايا مثلث هو قياس الزاوية المستقيمية)

اذن: $2\alpha=\pi-\frac{\pi}{6}$ نجد: $2\alpha=\frac{5\pi}{6}$

وبالتالي:

$$\boxed{\alpha=\frac{5\pi}{12}}$$

التمرين الثاني:

[I] الجزء الأول:

$$g(x)=e^{2x}-2x-1$$

I - 1) g دالة ق.ش على $\mathbb{R}$ (لأنها مجموع دوال ق.ش على $\mathbb{R}$) ولدينا:

$$g'(x)=(2x)'e^{x}-2=2e^{x}-2=2(e^{x}-1)$$

اشارة $g'(x)$ هي اشارة $(e^{x}-1)$

ولدينا : $e^x-1>0 \iff x>0$

$e^x-1=0 \iff x=0$

$e^x-1<0 \iff x<0$

إذن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	0	↗	

$g(0)=1-0-1=\boxed{0}$

I - 2) الاستنتاج :

من خلال جدول التغيرات لدينا :

g : تقبل قيمة دنيا (مطلقة) $g(0)=0$ على $\mathbb{R}$ إذن :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)\geqslant 0}$$

أي : $(\forall x\in\mathbb{R});\ e^{2x}-2x-1\geqslant 0$

ومنه : $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\quad e^{2x}-2x\geqslant 1}$

II - الجزء الثاني

$$f(x)=\frac{x}{e^{2x}-2x}$$

II - 1) نبين أن : $D_f=\mathbb{R}$.

نعلم من السؤال I - 2) أن :

$\forall x\in\mathbb{R}\quad e^{2x}-2x\geqslant 1$

اذن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad e^{2x}-2x>0$

إذن : $e^{2x}-2x\neq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

ومنه $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

II - 2 - أ) لدينا :

$$f(x)=\frac{x}{x\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)}=\frac{1}{\frac{e^{2x}}{x}-2}$$

وبما أن :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x\times e^x\times\frac{1}{x}=0\times0\times0=\boxed{0}$$

فإن :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{e^{2x}}{x}-2}=\frac{1}{0-2}$$

اذن : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}$

2

تأويل هندسي :

(C_f) يقبل فرعا لانهائيا بجوار $-\infty$ مقاربه الأفقي هو المستقيم ذو المعادلة :

$$y=-\frac{1}{2}$$

II - 2 - ب) التحقق :

لدينا :

$$f(x)=\frac{x}{x\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)}=\frac{1}{\frac{e^{2x}}{x}-2}=\frac{1}{2\left(\frac{e^{2x}}{2x}-1\right)}$$

حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$:

نضع : $X=2x$ لدينا $x\to+\infty$ اذن $X\to+\infty$

نعلم أن $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ اذن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$$

وبالتالي : $\lim_{x\to+\infty}2\left(\frac{e^{2x}}{2x}-1\right)=+\infty$

اذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$

تأويل هندسي :

(C_f) يقبل فرعا لانهائيا بجوار $+\infty$ مقاربه الأفقي هو المستقيم الذي معادلته :

$y=0$

(محور الأفاصيل)

II - 3) f دالة ق.ش على $\mathbb{R}$ لأنها خارج دالتين ق.ش على $\mathbb{R}$:

$x\mapsto x$ و $x\mapsto e^{2x}-2x$

(و المقام لا ينعدم) اذن :

$$f'(x)=\frac{1\times(e^{2x}-2x)-x\times(2e^{2x}-2)}{(e^{2x}-2x)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}-\cancel{2x}-2xe^{2x}+\cancel{2x}}{(e^{2x}-2x)^2}$$

3

نعلم من السؤال (I - 2) أن: $g(x) \geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

وبالتالي إشارة $f(x) - x$ هي نفس إشارة : $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$		$-$
$f(x)-x$	$+$		$-$
الوضع النسبي لـ: $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)	$O(0,0)$ نقطة مشتركة	$(\mathcal{C}_f)$ يوجد تحت (Δ)

II - 6) إنشاء $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) :

التمرين الثالث :

1) ليكن x من $\mathbb{R}$. لدينا:

$$x-1+\frac{1}{1+x}=\frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}$$

$$=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$$

إذن:

$$(\forall x\in\mathbb{R}):\ \frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{1+x}$$

2) لدينا:

$$\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\,dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}-1+\ln|2|\right)-\left(\ln|1|\right)$$

$$=\boxed{-\frac{1}{2}+\ln(2)}$$

إذن:

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=\frac{(1-2x)e^{2x}}{(e^{2x}-2x)^2}}$$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1-2x)$:

إشارة $(1-2x)$:

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$1-2x$	$+$	0	$-$

إذن جدول تغيرات f هو:

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{1}{2(e-1)}$	↘ 0

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1/2}{e^{2(\frac{1}{2})}-2(\frac{1}{2})}=\frac{1/2}{e-1}=\frac{1}{2(e-1)}$$

II - 4) معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول $x_0=0$ هي:

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

لدينا:

$$f'(x)=\frac{(1-2x)e^{2x}}{(e^{2x}-2x)^2}$$

إذن:

$$f'(0)=\frac{1e^0}{(1-0)^2}=1$$

وبالتالي المعادلة هي:

$$\boxed{y=x}$$

"لأن $f(0)=0$"

II - 5 - أ) ليكن x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)-x=\frac{x}{e^{2x}-2x}-x$$

$$=x\left(\frac{1}{e^{2x}-2x}-1\right)=x\times\frac{1-e^{2x}+2x}{e^{2x}-2x}$$

$$=-x\times\frac{e^{2x}-2x-1}{e^{2x}-2x}=\boxed{\frac{-xg(x)}{e^{2x}-2x}}$$

II - 5 - ب) استنتاج الوضع النسبي:

نعلم أن $e^{2x}-2x>0$ إذن إشارة $f(x)-x$ هي إشارة : $-xg(x)$

4

3) حساب : $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

مكاملة بالأجزاء :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x) \\ v'(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{1+x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

إذن :

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2\ln(1+x)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}\,dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln(2)\right)$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

إذن :

$$\boxed{\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{4}}$$

* * * *

ثانوية الليمون — واجب محروس رقم 3 من الدورة الثانية [موسم : 20 - 21]

2 باك علوم فيزيائية — (المدة : ساعتان)

(النقطة)	

التمرين الأول [الأعداد العقدية] : < 6 نقاط ونصف >

نعتبر الأعداد العقدية $a = 2(\sqrt{3}+i)$ ؛ $c = 2\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$ و $b = 1+i$

1) حدد الكتابة الأسية للعددين a و $\frac{b}{c}$. (1,5)

2) إستنتج أن العدد العقدي a^{15} تخيلي صرف . (0,5)

3) بين أن : $\frac{ab}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (1 ن)

4) حدد الكتابة الجبرية للعدد $\frac{ab}{c}$ ثم استنتج قيمة $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. (1,5)

5) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B ألحاقهما على التوالي a و b وليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{12}$.

5 - أ) حدد لحق النقطة P صورة B بالدوران R. (1 ن)

5 - ب) بين أن O و A و P نقط مستقيمية . (1 ن)

التمرين الثاني [دراسة دالة] : < 13 نقط ونصف >

I نعتبر الدالة g بحيث : $g(x) = 2x - 5 + 2e^{2x}$ لكل x من IR

I - 1) أحسب النهايتين $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ (1 ن)

I - 2) ضع جدول تغيرات الدالة g . (1 ن)

I - 3) بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]0,3 ; 0,4[$ (1 ن)

(نعطي القيم : $e^{0,6} = 1,8$ و $e^{0,8} = 2,2$)

I - 4) إستنتج اشارة $g(x)$ على IR . (1 ن)

II نعتبر الدالة f بحيث : $f(x) = (x-2)(2-e^{-2x})$ لكل x من IR .

وليكن $(\mathscr{C})$ منحنى f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

II - 1) بين أن : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ (1 ن)

II - 2) بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha - 3 + \frac{1}{2\alpha - 5}$ (1 ن)

II - 3) بين أن $f'(x) = e^{-2x} g(x)$; $(\forall x \in IR)$ (1 ن)

II - 4) حل في IR المعادلة : $f(x) = 0$ ثم ضع جدول تغيرات f. (2 ن)

II - 5) بين أن : $\lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - (2x-4)\right) = 0$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة . (1 ن)

II - 6) أنشئ $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f والمقاربات إن وجدت . (1,5)

III - 1) بين أن $F : x \mapsto x^2 - 4x + \left(\frac{-3}{4} + \frac{x}{2}\right)e^{-2x}$ هي دالة أصلية للدالة f على IR . (1 ن)

III - 2) احسب مساحة الحيز $\mathscr{D}$ المحصور بين $(\mathscr{C})$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين : $(\Delta_1) : x = 0$ و $(\Delta_2) : x = \frac{1}{2}$ (1 ن)

نعطي القيمة : $e = \frac{11}{4}$.

→ ★ ★ ❄ ★ ★ ←

تصحيح الواجب المحروس 3 دورة : II

2 باك علوم فيزيائية فوج الزوجيبي .

التمرين الأول :

$b = 1+i \ ; \ c = 2\sqrt{2}(1+i\sqrt{3}) \ ; \ a = 2(\sqrt{3}+i)$

1) الكتابة الأسية :

$a = 2(\sqrt{3}+i) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4e^{i\pi/6}$

$b = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$c = 2\sqrt{2}(1+i\sqrt{3}) = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 4\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

$\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \frac{e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/3}} = \frac{1}{4}e^{i(\pi/4 - \pi/3)}$

$= \frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi - 4\pi}{12}} = \boxed{\frac{1}{4}e^{i(-\frac{\pi}{12})}}$

2) الاستنتاج :

$a^{15} = (4e^{i\pi/6})^{15} = 4^{15}(e^{i\frac{\pi}{6}})^{15}$

ولدينا : $(e^{i\frac{\pi}{6}})^{15} = e^{i\frac{15\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}\right)}$

$= e^{i(2\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i2\pi} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 \times i$

اذن : $a^{15} = 4^{15} \times 1 \times i = i4^{15} \in i\mathbb{R}$

ومنه $\boxed{a^{15} \text{ تخيلي صرف}}$.

3) لدينا :

$\frac{ab}{c} = a \times \frac{b}{c}$

$= 4e^{i\pi/6} \times \frac{1}{4}e^{i(\frac{-\pi}{12})}$

$= \frac{4}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

اذن :

$\frac{ab}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4) الكتابة الجبرية للعدد $\frac{ab}{c}$:

① لدينا : $ab = 2(\sqrt{3}+i)(1+i)$

$= 2(\sqrt{3} + \sqrt{3}i + i - 1) = 2(\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3}+1))$

اذن :

$\frac{ab}{c} = \frac{2((\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1))}{2\sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})}$

$= \frac{2}{2\sqrt{2}} \ \frac{(\sqrt{3}-1 + i(\sqrt{3}+1))(1 - i\sqrt{3})}{1+3}$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - 3i - 1 + \sqrt{3}i + i(\sqrt{3}+1) + \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + i(-3 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1)\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(2\sqrt{3} + 2 + i2(\sqrt{3} - 1)\right)$

$= \frac{2\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)\right)$

$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} + i\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

اذن :

$\frac{ab}{c} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

طريقة أخرى :

لدينا :

$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \times b$

$= \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{4\sqrt{2}e^{i\pi/3}} \times \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= e^{i(-\frac{\pi}{6})} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 + i)$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - i)(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3}-1))$

اذن :

$\frac{ab}{c} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

الاستنتاج : من الكتابة المثلثية في السؤال 3) والكتابة الجبرية السابقة نستنتج أن :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

5) ليكن $A(\overline{a})$ و $B(\overline{b})$ و r دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{12}$.

5-أ) صيغة r هي: $z' = z_O + e^{i\frac{\pi}{12}}(z - z_O)$

اذن: $z' = e^{i\frac{\pi}{12}} z$

وبما أن: $P = r(B)$ فإن:

$$z_P = e^{i\frac{\pi}{12}} z_B = e^{i\frac{\pi}{12}}(\overline{b})$$

$$= e^{i\frac{\pi}{12}}\left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2} e^{i\left(\frac{-\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$$

اذن لحق P هو:

$$\boxed{z_P = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i}$$

5-ب) يكفي أن نبين أن:

$$\frac{z_P - z_O}{z_A - z_O} \in \mathbb{R}$$

لدينا:

$$\frac{z_P - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_P}{z_A} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}}{4 e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \in \mathbb{R}$$

ومنه O و A و P نقط مستقيمية.

التمرين الثاني:

I) $g(x) = 2x - 5 + 2e^{2x}$

I-1) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x - 5 + 2e^{2x}) = "-\infty - 5" = -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim_{x\to-\infty} (e^x)^2 = 0^2 = 0$

اذن: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$

حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$: لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = \lim_{x\to+\infty} (e^x)^2 = +\infty$$

اذن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x - 5 + 2e^{2x}) = \boxed{+\infty}$$

(2)

I-2) جدول تغيرات g:

g قاش على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2 + 2(2x)'e^{2x} = 2 + 4e^{2x} > 0$$

اذن: g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$-\infty \nearrow +\infty$

I-3) g متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

ولدينا $0 \in g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$g(0,3) = 0,6 - 5 + 2(1,8) = -0,8 < 0$$

$$g(0,4) = 0,8 - 5 + 2(2,2) = 0,2 > 0$$

اذن: $g(0,3)\,g(0,4) < 0$

ومنه: $\boxed{0,3 < \alpha < 0,4}$

I-4) استنتاج اشارة g على $\mathbb{R}$:

g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ وتنعدم في α

اذن فهي سالبة على $]-\infty;\alpha]$ وموجبة على $[\alpha;+\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) $f(x) = (x-2)(2 - e^{-2x})$

II-1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}(-e^{-2x}) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{(e^x)^2} = "\frac{-1}{0^+}" = \boxed{-\infty}$$

وبما أن: $\lim_{x\to-\infty}(x-2) = -\infty$

فإن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x-2)(2 - e^{-2x}) = \boxed{+\infty}$$

(3)

II-4) لنبحث x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=0 \iff (x-2)(2-e^{-2x})=0$$
$$\iff (x-2=0 \text{ أو } 2-e^{-2x}=0)$$
$$\iff (x=2 \text{ أو } 2=e^{-2x})$$

ولدينا :

$$2=e^{-2x} \iff \ln(2)=-2x\ln(e)$$
$$\iff \ln(2)=-2x$$
$$\iff x=-\frac{\ln(2)}{2}$$

اذن حلول المعادلة :

$$\left\{-\frac{\ln(2)}{2} ; 2\right\}$$

جدول تغيرات الدالة f :

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $g(x)$. اذن :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

II-5) لدينا :

$$f(x)-(2x-4)=(x-2)(2-e^{-2x})-2(x-2)$$
$$=(x-2)[2-e^{-2x}-2]$$
$$=(x-2)(-e^{-2x})=-\frac{x}{e^{2x}}+\frac{2}{e^{x}}$$

لدينا :

$$\frac{e^{2x}}{x}=2\times\frac{e^{2x}}{2x}=2\frac{e^{X}}{X}$$

حيث $X=2x$ و $X\to+\infty$ (اذ $x\to+\infty$)

اذن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim_{X\to+\infty}2\frac{e^{X}}{X}=+\infty$$

ومنه :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-4)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2x}{e^{2x}}\right)-\frac{2}{e^{x}}=0$$

تأويل هندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=2x-4$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $(+\infty)$.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}2-e^{-2x}=\lim 2-\frac{1}{(e^{x})^{2}}="2-\frac{1}{+\infty}"$$
$$=2$$

اذن :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2)(2-e^{-2x})$$
$$=\boxed{+\infty}$$

II-2) لدينا :

$$f(\alpha)=(\alpha-2)(2-e^{-2\alpha})$$

ونعلم أن $g(\alpha)=0$ اذن : $2\alpha-5+2e^{2\alpha}=0$

$$\Rightarrow e^{2\alpha}=\frac{5-2\alpha}{2} \Rightarrow e^{-2\alpha}=\frac{2}{5-2\alpha}$$

نعوض في $f(\alpha)$:

$$f(\alpha)=(\alpha-2)\left(2-\frac{2}{5-2\alpha}\right)$$
$$=(\alpha-2)\left(\frac{8-4\alpha}{5-2\alpha}\right)$$
$$=\frac{-4\alpha^{2}+16\alpha-16}{5-2\alpha}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$2\alpha-3+\frac{1}{2\alpha-5}=\frac{(\alpha-3)(2\alpha-5)+1}{2\alpha-5}$$
$$=\frac{4\alpha^{2}-16\alpha+16}{2\alpha-5}=\frac{-4\alpha^{2}+16\alpha-16}{5-2\alpha}=f(\alpha)$$

ومنه :

$$\boxed{f(\alpha)=2\alpha-3+\frac{1}{2\alpha-5}}$$

II-3) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=(x-2)'(2-e^{-2x})+(x-2)(2-e^{-2x})'$$
$$=2-e^{-2x}+(x-2)(2e^{-2x})$$
$$=2-e^{-2x}+2xe^{-2x}-4e^{-2x}$$
$$=2-5e^{-2x}+2xe^{-2x}$$
$$=e^{-2x}\left(\frac{2}{e^{-2x}}-\frac{5e^{-2x}}{e^{-2x}}+\frac{2xe^{-2x}}{e^{-2x}}\right)$$
$$=e^{-2x}(2e^{2x}-5+2x)=e^{-2x}g(x)$$

اذا :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}) ;\ f'(x)=e^{-2x}g(x)}$$

III) $F(x) = x^2 - 4x + \left(\frac{-3}{4} + \frac{x}{2}\right)e^{-2x}$

III-1) F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$:

$$F'(x) = 2x - 4 + \left(\frac{-3}{4} + \frac{x}{2}\right)' e^{-2x} + \left(-\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right)\left(e^{-2x}\right)'$$
$$= 2x - 4 + \frac{e^{-2x}}{2} + \left(-\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right)\left(-2e^{-2x}\right)$$
$$= 2x - 4 + e^{-2x}\left[\frac{1}{2} - 2\left(\frac{-3}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]$$
$$= 2(x-2) + e^{-2x}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - x\right)$$
$$= 2(x-2) + e^{-2x}(2 - x)$$
$$= (x-2)(2 - e^{-2x}) = f(x)$$

إذن: F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

III-2) مساحة $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{A} = \left(\int_0^{1/2} |f(x)|\, dx\right) u.a$$

حيث: $u.a = (2cm)(2cm) = 4\ cm^2$

(4) لدينا (C) تحت محور الأفاصيل على المجال $[0;1]$ وبالخصوص على المجال $[0;\frac{1}{2}]$: اذن: f سالبة على هذا المجال ومنه:

$$\forall x \in [0;\tfrac{1}{2}];\ |f(x)| = -f(x)$$

اذن:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$$
$$= -\left[F(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\left(F\left(\tfrac{1}{2}\right) - F(0)\right)$$
$$= F(0) - F\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

حيث:

$$F(x) = x^2 - 4x + \left(-\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right)e^{-2x}$$

اذن:

$$F(0) = \frac{-3}{4}e^0 = \boxed{\frac{-3}{4}}$$
$$F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{e}$$
$$= \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \boxed{\frac{1}{4} - 2 - \frac{2}{11}}$$

اذن:

$$F(0) - F\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + 2 + \frac{2}{11}$$
$$= -1 + 2 + \frac{2}{11}$$
$$= 1 + \frac{2}{11} \simeq \boxed{1,18}$$

وبالتالي:

$$\mathcal{A} = 1,18\ .ua = 1,18 \times 4\ cm^2$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 4,72\ cm^2}$$

* * *

ثانوية الليمون — 2 باك علوم فيزيائية PC2 [2k+1]

الواجب المحروس الثالث من الدورة الثانية

[المدة : ساعتان] موسم : 20 - 21

التمرين الأول [الأعداد العقدية] < 5 نقط >

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : \frac{1}{2}z^2 - z + 2 = 0$ (ن1)

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ النقط A و B و C و D ألحاقها على التوالي هي : $a = 4$ و $b = 1 - i\sqrt{3}$ و $c = \overline{b}$ و $d = 4 + i2\sqrt{3}$

2 - أ) حدد الكتابة المثلثية للأعداد a و b و c . (1,5)

2 - ب) بين أن : $\frac{b-a}{c-a} = e^{i\pi/3}$ ثم استنتج طبيعة المثلث : ABC . (ن1)

3) نعتبر الدوران R الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

3 - أ) بين أن صيغة R العقدية هي: $z' = 4 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 4)$ (0,5)

3 - ب) بين أن : $R(C) = D$. (0,5)

4) بين أن الرباعي ABCD معين . (0,5)

التمرين الثاني : [دراسة دالة] < 15 نقطة >

I الجزء الأول :

نعتبر الدالة g بحيث : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = (x^2 - 1)e^x + 1$

I - 1) أحسب النهايتين : $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ (ن1)

I - 2) بين أن : $g'(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ ثم ضع جدول تغيرات g . (ن2)

I - 3) بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما منعدم و الآخر α يحقق : $0,7 < \alpha < 0,8$ (ن1)

نعطي القيم : $g(-1+\sqrt{2}) = -0,25$; $g(-1-\sqrt{2}) = 1,4$

$g(0,8) = 0,12$; $g(0,7) = -0,03$

I - 4) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$. (ن1)

II الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f بحيث : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + (x-1)^2 e^x$

وليكن $(\mathcal{C})$ منحنى f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,cm$

II - 1) احسب النهايتين : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. (ن1)

II - 2) بين أن : $f'(x) = g(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f . (ن2)

II - 3 - أ) بين أن : $f(\alpha) = \alpha - 1 + \frac{2}{\alpha + 1}$ (0,5)

II - 3 - ب) استنتج أن : $0,81 < f(\alpha) < 0,97$ (0,5)

II - 4) أثبت أن $(\mathcal{C})$ يقبل نقطتي انعطاف مع تحديدهما . (ن1)

II - 5) ليكن (Δ) المماس لـ : $(\mathcal{C})$ في النقطة $A(1;1)$. تحقق أن : $(\Delta) : y = x$ (0,5)

II - 6 - أ) بين أن (Δ) مقارب مائل لـ : $(\mathcal{C})$ بجوار $(-\infty)$. (0,5)

II - 6 - ب) حدد الوضع النسبي لـ : $(\mathcal{C})$ و (Δ) . (0,5)

II - 7) بين أن $(\mathcal{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $(+\infty)$ مع تحديد اتجاهه . (0,5)

II - 8) ارسم (Δ) و $(\mathcal{C})$ في نفس المعلم . (1,5)

III الجزء الثالث :

III - 1) تحقق أن $F : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + (5 - 4x + x^2)e^x$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. (0,5)

III - 2) استنتج مساحة الحيز المحصور بين $(\mathcal{C})$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين : $(\Delta_1) : x = 0$ و $(\Delta_2) : x = 1$ (ن1)

تصحيح الواجب المحروس 3 دورة II

قسم PC_2 [2k+1]

التمرين الأول :

1) (E) $\frac{1}{2}z^2 - z + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4(\frac{1}{2})(2) = -3 < 0$

حلان عقديان مترافقان :

$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2(\frac{1}{2})} = 1 - i\sqrt{3}$

$z_2 = \overline{z_1} = 1 + i\sqrt{3}$

مجموعة الحلول هي : $\{1 - i\sqrt{3} \, ; \, 1 + i\sqrt{3}\}$

2) نضع : $a = 4$ و $b = 1 - i\sqrt{3}$ و $c = \overline{b}$

2-أ) الكتابة المثلثية :

$a = [4 ; 0]$

$b = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = [2 ; -\frac{\pi}{3}]$

$c = \overline{b} = [2 ; \frac{\pi}{3}]$

2-ب)

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1 - i\sqrt{3} - 4}{1 + i\sqrt{3} - 4} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i)}{3 + 1} = \frac{1}{4}(3 + 2\sqrt{3}i - 1)$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\pi/3}$$

3) R دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

3-أ) صيغة R هي :

$z' = z_A + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$

اذن :

$z' = 4 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 4)$

3-ب) لدينا :

$$4 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_C - 4)$$

$$= 4 + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3} - 4)$$

$$= 4 + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})$$

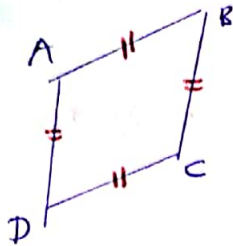
$$= 4 + \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i + 3)$$

$$= 4 + \frac{1}{2}(4\sqrt{3}i) = 4 + 2\sqrt{3}i = d = z_D$$

وبالتالي : $R(C) = D$

4) نبين أن الرباعي ABCD معين :

تذكير :

تعريف 1 : المعين هو رباعي جميع أضلاعه متقايسة

تعريف 2 : المعين هو متوازي أضلاع ضلعان فيه متتابعان متقايسان

طريقة 1 : استعمال التعريف 1 :

$AB = |z_B - z_A| = |-3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = |\overline{b} - b| = |b - \overline{b}| = |2i\,Im(b)|$

$= |2i(-\sqrt{3})| = |2||i||-\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$CD = |z_D - z_C| = |4 + i2\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}|$

$= |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$DA = |z_A - z_D| = |4 - 4 - i2\sqrt{3}| = |i2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

اذن : $AB = BC = CD = DA$

وبالتالي ABCD معين .

طريقة 2 : استعمال التعريف 2 :

لدينا : $aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = -3 - i\sqrt{3}$

$aff(\overrightarrow{DC}) = z_C - z_D = 1 + i\sqrt{3} - 4 - i2\sqrt{3}$

$= -3 - i\sqrt{3}$

اذن : $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(\overrightarrow{DC})$

ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

وهذا يعني أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

وبما أن له ضلعان متتابعان متقايسان هما : AB و BC (لأن $AB = BC = 2\sqrt{3}$)

فإنه معين

التمرين الثاني:

[I] $g(x) = (x^2-1)e^x + 1$

(I-1 حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^x - e^x + 1 = 0 + 1 = \boxed{1}$$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2-1)e^x + 1 = \boxed{+\infty}$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1 = +\infty$

(I-2 g ق.ش على IR ولدينا:

$$g'(x) = 2xe^x + (x^2-1)e^x = (2x + x^2 - 1)e^x$$

اذن: $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g'(x) = (x^2+2x-1)e^x$

جدول تغيرات g:

اشارة $g'(x)$ هي نفس اشارة x^2+2x-1

ولدينا: $x^2+2x-1 = (x-x_1)(x-x_2)$

$\Delta = 4 - 4(-1) = 8 > 0$

حلاه:

$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$

اذن: $x^2+2x-1 = (x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))$

وبالتالي:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
g	1	↗	1,4	↘	−0,25	↗	$+\infty$

لأن:

$g(-1-\sqrt{2}) \simeq 1,4$

$g(-1+\sqrt{2}) \simeq -0,25$

(I-3

على المجال: $]-\infty;-1-\sqrt{2}]$

g موجبة قطعا لأن: $g(]-\infty;-1-\sqrt{2}]) =]1;1,4]$

اذن: $g(x)=0$ ليس لها حل.

على المجال: $I = [-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}]$

لدينا: $0\in g(I) = [-0,25;1,4]$

اذا: $g(x)=0$ لها حل $\alpha\in I$

هذا الحل وحيد لأن g رتيبة قطعا على I.

على المجال $J = [-1+\sqrt{2};+\infty[$:

لدينا: $g(J) = [-0,25;+\infty[$

اذن: $0\in g(J)$

اذن 0 عبارة عن صورة لعدد من المجال J أي أن $g(x)=0$ تقبل حلا في J : هذا الحل وحيد لأن g رتيبة قطعا على J.

خلاصة: المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين في IR.

بما أن: $g(0) = -e^0+1 = -1+1 = 0$

فإن 0 حل للمعادلة. ليكن α هو الحل الآخر، لدينا:

g متصلة على $[0,7;0,8]$ و:

$g(0,7)\times g(0,8) = -0,03\times 0,12 < 0$

اذن: حسب مبرهنة القيم الوسيطية

$$\boxed{0,7 < \alpha < 0,8}$$

(I-4 إشارة g على IR :

لدينا: g تنعدم في 0 و α

وحسب جدول التغيرات g موجبة على المجالين: $]-\infty;0]$ و $[0+\infty[$

وسالبة على $[0;\alpha]$ اذن:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	0	+	

II

$$f(x)=x+(x-1)^2e^x$$

II-1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty$

اذن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$$

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

لايمكن الحساب مباشرة ! ولدينا:

$$(x-1)^2e^x=x^2e^x-2xe^x+e^x$$

اذن:

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2e^x=\lim_{x\to-\infty}x^2e^x-2xe^x+e^x=0$$

ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty} x+(x-1)^2e^x=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

II-2) f ق.ش على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=1+2(x-1)e^x+(x-1)^2e^x$$
$$=1+[2x-2+(x-1)^2]e^x$$
$$=1+(2x-2+x^2-2x+1)e^x$$
$$=1+(x^2-1)e^x=g(x)$$

اذن:

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=g(x)}$$

جدول تغيرات f :

اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $g(x)$ اذن:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$f(0)=1$

③

II-3-أ) لدينا:

$$f(\alpha)=\alpha+(\alpha-1)^2e^\alpha$$
$$=\alpha+(\alpha-1)[(\alpha-1)e^\alpha]$$

نعلم أن: $g(\alpha)=0$ اذن: $(\alpha^2-1)e^\alpha+1=0$

$$\Rightarrow (\alpha+1)(\alpha-1)e^\alpha=-1$$
$$\Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha=\frac{-1}{\alpha+1}$$

نعوض في $f(\alpha)$:

$$f(\alpha)=\alpha+(\alpha-1)\left[\frac{-1}{\alpha+1}\right]$$
$$=\alpha+\frac{1-\alpha}{\alpha+1}$$
$$=\alpha-1+1+\frac{1-\alpha}{\alpha+1}$$
$$=\alpha-1+\frac{\alpha+1+1-\alpha}{\alpha+1}$$

اذن:

$$\boxed{f(\alpha)=\alpha-1+\frac{2}{\alpha+1}}$$

II-3-ب) نعلم أن: $0,7<\alpha<0,8$

اذن: ① $\boxed{-0,3<\alpha-1<-0,2}$

ولدينا: $1,7=\frac{17}{10}<\alpha+1<1,8=\frac{18}{10}$

اذن: $\frac{10}{18}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{10}{17}$

ومنه: $\frac{20}{18}<\frac{2}{\alpha+1}<\frac{20}{17}$

اذن: ② $\boxed{1,11<\frac{2}{\alpha+1}<1,17}$

من ① و ②: $0,81<\alpha-1+\frac{2}{\alpha+1}<0,97$

وحسب السؤال II-3-أ) نستنتج أن:

$$\boxed{0,81<f(\alpha)<0,97}$$

II-4) f ق.ش مرتين على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f''(x)=(f'(x))'=(g(x))'=g'(x)$$
$$=(x^2+2x-1)e^x$$
$$=(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))e^x$$

جدول اشارة $f''(x)$:

(4)
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x} + (x-1)^2\frac{e^x}{x}$$
$$= 1 + (x-1)^2\frac{e^x}{x}$$

إذن :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + (x-1)^2\frac{e^x}{x}$$
$$= +\infty$$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$)

ومنه (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ في اتجاه محور الأراتيب.

II-8) إنشاء (C) و (Δ).

III

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + (5 - 4x + x^2)e^x$$

F قابلة للاشتقاق على IR ولدينا لكل x من IR :

x		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$	
$f''(x)$	+	0	−	0	+

f'' تنعدم وتغير اشارتها في $-1-\sqrt{2}$ و $-1+\sqrt{2}$ وبالتالي (C) يقبل نقطتي انعطاف احداثياتهما :

$(-1+\sqrt{2}; f(-1+\sqrt{2}))$ و $(-1-\sqrt{2}; f(-1-\sqrt{2}))$

مع : $-1-\sqrt{2} \simeq -2,4$

إذن : $f(-2,4) = -2,4 + (-3,4)^2 e^{-2,4} \simeq \boxed{-1,3}$

ولدينا : $-1+\sqrt{2} \simeq 0,4$

$$f(-1+\sqrt{2}) \simeq f(0,4) = 0,4 + (-0,6)^2 e^{-0,4}$$
$$\simeq \boxed{0,6}$$

II-5) معادلة المماس (Δ) لـ (C) في $A(1,1)$ هي :

$$(\Delta): \quad y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

حيث : $f(1) = 1$ و :

$$f'(1) = g(1) = 1$$

إذن :
$$(\Delta): \quad y = x - 1 + 1$$
$$\boxed{(\Delta): \ y = x}$$

II-6-أ)

$$f(x) - y = (x-1)^2 e^x = x^2e^x - 2xe^x + e^x$$

إذن :
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y) = 0$$

ومنه : (Δ) مقارب مائل لـ (C) بجوار $(-\infty)$.

II-6-ب) الوضع النسبي :

$$f(x) - y = (x-1)^2 e^x \geq 0$$

إذن : (C) يوجد فوق (Δ).

II-7) نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

نحسب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$F'(x) = x + (-4+2x)e^x + (5-4x+x^2)e^x$$
$$= x + (-4+2x+5-4x+x^2)e^x$$
$$= x + (1-2x+x^2)e^x$$
$$= x + (1-x)^2 e^x$$
$$= x + (x-1)^2 e^x = f(x)$$

اذن F دالة أصلية لـ : f على $\mathbb{R}$.

III - 2) مساحة الحيز :

$$\mathcal{A} = \left(\int_0^1 |f(x)|\,dx\right) u.a$$

حيث :
$$u.a = (2\,cm)(2\,cm)$$
$$= 4\,cm^2$$

(C) يوجد فوق محور الأفاصيل على المجال $[0,+\infty[$ وبالخصوص على $[0;1]$.

اذا f دالة موجبة على $[0,1]$

ومنه : $(\forall x \in [0;1]) ; \ |f(x)| = f(x)$

اذن :
$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$
$$= [F(x)]_0^1$$
(حسب III - 1) F أصلية لـ : f)
$$= F(1) - F(0)$$

مع : $F(x) = \frac{x^2}{2} + (5-4x+x^2)e^x$

اذن :
$$F(1) = \frac{1}{2} + 2e = 0,5 + 2\times 2,7$$
$$= 0,5 + 5,4 = \boxed{5,9}$$
$$F(0) = 5e^0 = \boxed{5}$$

اذن :

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = 5,9 - 5 = 0,9$$

وبالتالي :

$$\mathcal{A} = 0,9 \times 4\,cm = \boxed{3,6\,cm^2}$$

* * *

ملاحظة : لمعرفة اشارة f على المجال $[0;1]$ هناك عدة طرق :

مثلا : $f(x) = x + (x-1)^2 e^x$

لدينا : $(\forall x \in [0,1]) \ x \geq 0$

اذن : $(\forall x \in \mathbb{R})$
$$\underbrace{x + (x-1)^2 e^x}_{f(x)\,\geq\,0} \geq (x-1)^2 e^x$$

طريقة أخرى :

بما أن f تزايدية قطعا على $[0;1]$

فإن :
$$\forall x \in [0;1] : \ f(0) \leq f(x)$$
$$\Rightarrow \forall x \in [0;1] : \ 1 \leq f(x)$$

اذن f موجبة على $[0;1]$.

—— * *fin* * * ——

ثانوية الليمون
2 باك علوم فيزيائية

واجب محروس رقم 3 من الدورة II

PC3 [2k+1]

[المدة : ساعتان] موسم : 21-22

التمرين الأول [الأعداد العقدية] . <6 نقط ونصف>

I نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلتين :

$(E) : 8z^3+1=0$

$(F) : 4z^2-2z+1=0$

(0,5) I-1) تحقق أن : $(\forall z\in\mathbb{C}) ; \ (2z+1)(4z^2-2z+1)=8z^3+1$

(1,5) I-2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (F) ثم استنتج حلول المعادلة : (E) .

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. نعتبر النقط A و B و C ألحاقها على التوالي: $a=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ و $b=-\frac{1}{8}+\frac{i\sqrt{3}}{8}$ و $c=-\frac{1}{2}$.

(0,5) II-1) أكتب a على شكله الأسي .

(0,1) II-2) تحقق أن : $a^2=b$ ثم استنتج أن : $Arg(b)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

(0,1) II-3-أ) بين أن : $\frac{b-a}{b}=i\sqrt{3}$

(0,5) II-3-ب) استنتج أن المثلث OAB قائم الزاوية في B .

II-4) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

(0,5) II-4-أ) حدد الصيغة العقدية للدوران R .

(0,1) II-4-ب) بين أن : $R(A)=C$

التمرين الثاني [دراسة دالة] <13 نقطة ونصف>

I الجزء الأول : نعتبر الدالة g بحيث : $(\forall x\in\mathbb{R}) ; \ g(x)=1-(x-1)^2e^{-x}$

(0,1) I-1) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

(0,1) I-2) بين أن : $g'(x)=(x-3)(x-1)e^{-x}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

(0,1) I-3) استنتج اشارة $g(x)$ على المجالين : $[0+\infty[$ و $]-\infty;0]$ (نعطي $1-4e^{-3}=0,8$)

II الجزء الثاني : نعتبر الدالة f بحيث : $(\forall x\in\mathbb{R}) ; \ f(x)=x-1+(x^2+1)e^{-x}$

وليكن $(\mathscr{C})$ منحنى f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

(0,1) II-1-أ) بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ثم احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

(0,5) II-1-ب) استنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $(-\infty)$ مع تحديد اتجاهه .

(0,5) II-2-أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

(0,5) II-2-ب) بين أن المستقيم $(\Delta) : y=x-1$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $(+\infty)$.

(0,5) II-2-ج) ادرس الوضع النسبي لـ : $(\mathscr{C})$ و (Δ) .

(1,5) II-3) تحقق أن : $f'(x)=g(x)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

(0,1) II-4) بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=x$ على $\mathbb{R}$.

(0,1) II-5) بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطتي انعطاف مع تحديدهما .

(1,5) II-6) أنشئ $(\mathscr{C})$ و (Δ) في نفس المعلم .

III الجزء الثالث : III-1) تحقق أن الدالة : $F : x\mapsto-(x^2+2x+2)e^{-x}$

(0,5) هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

(0,2) III-2) استنتج أن : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^{-x}dx=-3+2e$ ثم أحسب مساحة الحيز D المحصور بين $(\mathscr{C})$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين : $(\Delta_1) : x=-1$ و $(\Delta_2) : x_2=0$

تصحيح الواجب المحروس رقم 3 دورة II

قسم : PC_3 [2k+1]

التمرين الأول :

I

$(E) : 8z^3 + 1 = 0$

$(F) : 4z^2 - 2z + 1 = 0$

I-1) التحقق :

لكل z من $\mathbb{C}$: $(2z+1)(4z^2 - 2z + 1)$

$= 8z^3 - 4z^2 + 2z + 4z^2 - 2z + 1$

$= 8z^3 + 1$

I-2) حل (F) :

$(F) : 4z^2 - 2z + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(4) = 4(1-4) = -12 < 0$

حلان عقديان مترافقان :

$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2(4)} = \frac{2 - i2\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$

$z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$

استنتاج حل (E) :

$(E) : 8z^3 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2z+1)(4z^2 - 2z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2z + 1 = 0$ أو $4z^2 - 2z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$ أو $z = z_1$ أو $z = z_2$

اذن مجموعة الحلول هي :

$\{-\frac{1}{2} ; z_1 ; z_2\}$

II

II-1) الكتابة الأسية لـ a :

$a = \frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{i\pi/3}$

II-2) التحقق :

$a^2 = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} + 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{3}{16}$

$= -\frac{2}{16} + \frac{i\sqrt{3}}{8} = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8} = b$

طريقة أخرى :

$a^2 = \left(\frac{1}{2} e^{i\pi/3}\right)^2 = \frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

اذن : $a^2 = -\frac{1}{8} + \frac{i\sqrt{3}}{8} = b$

(1)

الاستنتاج : نضع : $b = [r ; \theta]$

حيث θ هو عمدة b ، لدينا مما سبق :

$b = a^2 \Rightarrow [r ; \theta] = \left(\frac{1}{2} e^{i\pi/3}\right)^2 = \left[\frac{1}{4} ; \frac{2\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow \boxed{Arg(\theta) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]}$

II-3-أ) لدينا : $\frac{b-a}{b} = \frac{-\frac{1}{8} + \frac{i\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}}{-\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}}$

نضرب البسط والمقام في 8 :

$\frac{b-a}{b} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} i}{-1 + i\sqrt{3}}$

$= \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)}{1 - i\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)(1 + i\sqrt{3})}{1 + 3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} + 3i + i - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(4i)$

اذن : $\boxed{\frac{b-a}{b} = i\sqrt{3}}$

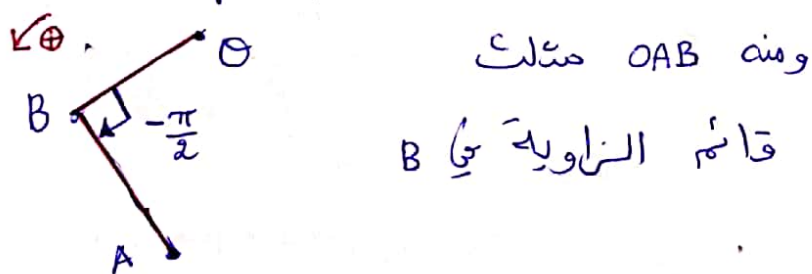
II-3-ب) الاستنتاج :

لدينا : $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_O} = \frac{b-a}{b} = i\sqrt{3}$

$\Rightarrow Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_O}\right) \equiv Arg(i\sqrt{3}) [2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{BO} ; \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

ومنه مثلث OAB قائم الزاوية في B

II-4-أ) صيغة الدوران :

$z' = z_O + e^{i2\pi/3}(z - z_O)$

$\Rightarrow \boxed{z' = e^{i2\pi/3} z}$

II-4-ب) لدينا $e^{i2\pi/3} z_A = e^{i2\pi/3}\left(\frac{1}{2} e^{i\pi/3}\right)$

$= \frac{1}{2} e^{i\frac{3\pi}{3}} = \frac{1}{2} e^{i\pi} = -\frac{1}{2} = z_C$

التمرين الثاني

I

$$g(x) = 1-(x-1)^2e^{-x}$$

I-1) حساب $\lim\limits_{+\infty} g$

لدينا:

$$(x-1)^2e^{-x} = \frac{x^2-2x+1}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} - 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

نعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n\geq 0)$

اذن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1-\left(\frac{x^2}{e^x} - 2\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right) = 1-0 = \boxed{1}$$

حساب: $\lim\limits_{-\infty} g$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} -(x-1)^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} -(x-1)(x-1) = -\infty$

ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

اذن:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = "\frac{-\infty}{0^+}" = \boxed{-\infty}$$

I-2) g ق.ش.ق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x) = -2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2(e^{-x})'$$
$$= (-2x+2)e^{-x} + (x-1)^2e^{-x}$$
$$= (-2x+2+(x-1)^2)e^{-x}$$
$$= (-2x+2+x^2-2x+1)e^{-x}$$
$$= (x^2-4x+3)e^{-x}$$

ولدينا، $x^2-4x+3 = (x-x_1)(x-x_2)$

لحساب x_1, x_2 لدينا، $\Delta = 16-4(3) = 4>0$

اذن، $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ و $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$

اذن، $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$

وبالتالي: لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\boxed{g'(x) = (x-1)(x-3)e^{-x}}$$

(2)

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(x-1)(x-3)$

ولدينا:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	1	↘	$1-4e^{-3}$	↗	1

$g(1) = 1$; $g(3) = 1-4e^{-3}$

I-3) استنتاج إشارة $g(x)$:

• على المجال $[1+\infty[$:

$g(3) = 0{,}8 > 0$ قيمة دنيا للدالة g وبالتالي

$\boxed{g \text{ موجبة على } [1+\infty[}$

• على المجال $]-\infty;1]$:

لدينا: g تزايدية قطعا على $]-\infty;1]$ وتنعدم في العدد 0 اذن فهي:

$\boxed{\text{موجبة على } [0;1] \text{ وسالبة على }]-\infty;0]}$

خلاصة:

g موجبة على $[0;1]\cup[1;+\infty[=[0;+\infty[$

g سالبة على $]-\infty;0]$

II

$$f(x) = x-1+(x^2+1)e^{-x}$$

II-1-أ) حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا:

$$f(x) = x-1+(x^2+1)e^{-x}$$
$$= x-1+\frac{x^2+1}{e^x} = \frac{xe^x - e^x + x^2+1}{e^x}$$

نعلم أن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^- \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \end{cases}$$

اذن:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x - e^x + x^2+1}{e^x} = "\frac{+\infty}{0^+}" = \boxed{+\infty}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ ؛ لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x - e^x + x^2+1}{xe^x} = "\frac{+\infty}{0^-}" = \boxed{-\infty}$$

II - 1 - ب) من السؤال السابق نستنتج أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $(-\infty)$.

II - 2 - أ) حساب $\lim\limits_{+\infty} f$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 1 + \frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$$
$$= \boxed{+\infty}$$

II - 2 - ب) لدينا:

$$f(x) - (x-1) = (x^2+1)e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

اذن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 0$$

وبالتالي $(\Delta) : y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

II - 2 - ج) الوضع النسبي:

بما أن: $f(x) - (x-1) = (x^2+1)e^{-x} > 0$ لكل x من IR : فإن (C) يوجد فوق (Δ).

II - 3) التحقق:

f ق.ش على IR ولدينا:

$$f'(x) = \left(x - 1 + (x^2+1)e^{-x}\right)'$$
$$= 1 + 2xe^{-x} + (x^2+1)(e^{-x})'$$
$$= 1 + 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x}$$
$$= 1 + (2x - x^2 - 1)e^{-x}$$
$$= 1 - (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$
$$= 1 - (x-1)^2 e^{-x} = g(x)$$

اذن:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = g(x)}$$

جدول تغيرات f:

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $g(x)$ على IR وحسب السؤال I - 3) يكون لدينا ما يلي:

(3)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

II - 4) 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$

بما أن $f(0) = 0$ فإن 0 حل للمعادلة $f(x) = x$

نبرهن أن 0 وحيد:

نعتبر الدالة: $h : x \mapsto f(x) - x$

h ق.ش على IR ولدينا:

$$h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1 = -(x-1)^2 e^{-x}$$

$h'(x) \leq 0$ اذن h رتيبة قطعا.

h دالة متصلة على IR
h رتيبة قطعا على IR
0 حل للمعادلة $h(x) = 0$

اذن 0 هو الحل الوحيد.

أي أن: 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$ على IR.

II - 5) f ق.ش مرتين على IR ولدينا:

$$f''(x) = (g(x))' = (x-3)(x-1)e^{-x}$$

اذن:

$$f''(x) = 0 \iff x = 3 \text{ أو } x = 1$$

x		1		3	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

f'' تنعدم في $x_0 = 1$ و $x_1 = 3$ وتغير اشارتها. اذن f تقبل نقطتي انعطاف:

$A(1; f(1))$ و $B(3; f(3))$

أي: $A(1; 0{,}8)$ و $B(3; 2{,}5)$

لأن:

$$f(3) = 2 + 10e^{-3} \simeq 2{,}5$$
$$f(1) = 1 - 4e^{-3} \simeq 0{,}8$$

II - 6) انشاء (C) و (Δ):

④ $\int_{-1}^{0} x^2 e^{-x} dx = -2+e$ إذن :

ولدينا :

$\int_{-1}^{0} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-1}^{0}$

$= -e^0 + e^1 = -1+e$

إذن :

$\int_{-1}^{0} (x^2+1)e^{-x} dx = -2+e-1+e$

$= \boxed{-3+2e}$

مساحة الحيز $\mathcal{D}$ هي :

$\mathcal{A} = \left(\int_{-1}^{0} |f(x)| dx\right) u.a$

حيث : $u.a = (2cm)(2cm) = 4\ cm^2$

الدالة f موجبة على $\mathbb{R}$ لأن $(\mathcal{C})$ يوجد فوق محور الأفاصيل .

وبالتالي f موجبة على $[-1;0]$ إذن :

$\forall x \in [-1;0] ; |f(x)| = f(x)$

ومنه :

$\int_{-1}^{0} |f(x)| dx = \int_{-1}^{0} f(x) dx$

$= \int_{-1}^{0} \left(x-1+(x^2+1)e^{-x}\right) dx$

$= \int_{-1}^{0} (x-1) dx + \int_{-1}^{0} (x^2+1)e^{-x} dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{0} + (-3+2e)$

$= 0 - \left(\frac{1}{2}+1\right) + (-3+2e)$

$= -\frac{3}{2} - 3 + 2e = -\frac{9}{2} + 2e$

$= -4,5 + 2 \times 2,7$ (نعلم أن : $e = 2,7$)

$= -4,5 + 5,4$

$= 0,9$

إذن :

$\mathcal{A} = 0,9.ua = 0,9 \times 4\ cm^2$

$\boxed{\mathcal{A} = 3,6\ cm^2}$

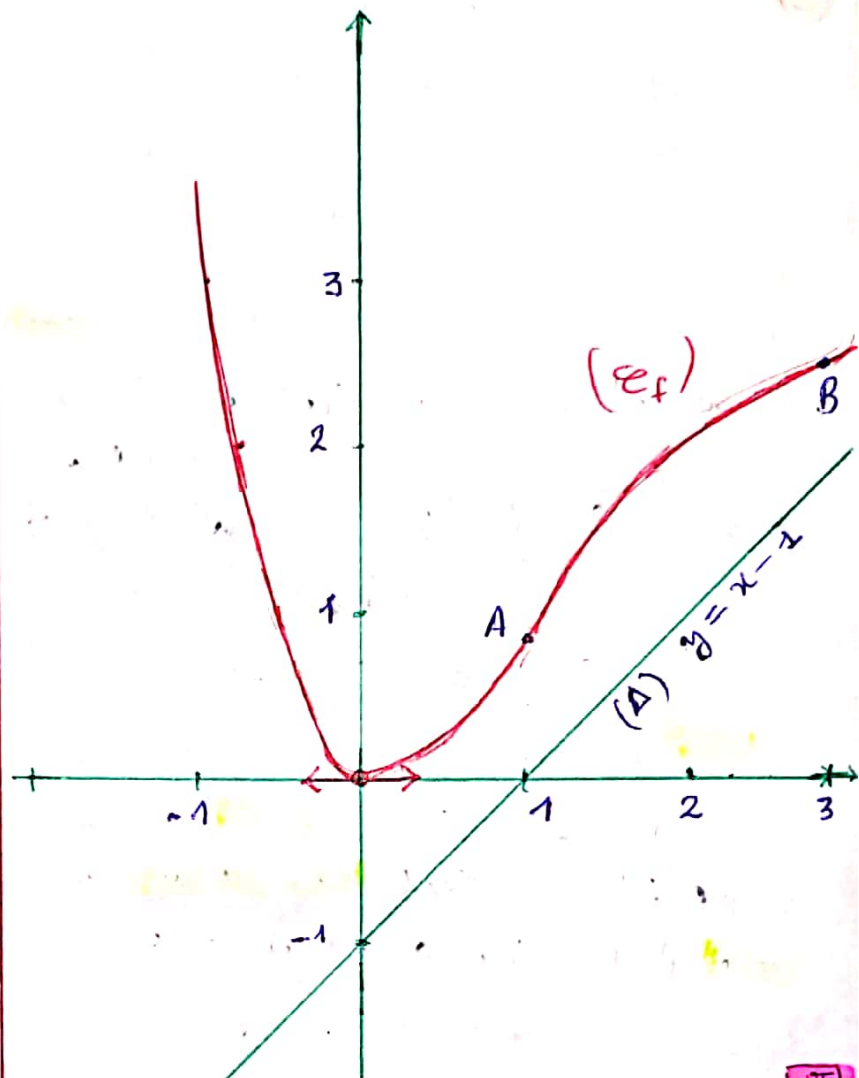
تم بحمد الله

★ ★ ★

ما كان فيه من صواب فبتوفيق من الله .
وما كان فيه من خطأ فكل بني آدم خطاء

$(\mathcal{C}_f)$ — A — B — $(\Delta)\ y = x-1$

III

III-1) لدينا F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و :

$F'(x) = \left((-x^2-2x-2)e^{-x}\right)'$

$= (-x^2-2x-2)'e^{-x} + (-x^2-2x-2)(e^{-x})'$

$= (-2x-2)e^{-x} - (-x^2-2x-2)e^{-x}$

$= (-2x-2+x^2+2x+2)e^{-x}$

$= x^2 e^{-x}$

إذن $\boxed{F \text{ دالة أصلية للدالة } x \mapsto x^2 e^{-x} \text{ على } \mathbb{R}}$

III-2) الاستنتاج :

$\int_{-1}^{0} (x^2+1)e^{-x} dx = \int_{-1}^{0} x^2 e^{-x} + e^{-x} dx$

$= \int_{-1}^{0} x^2 e^{-x} dx + \int_{-1}^{0} e^{-x} dx$ (ع . شال)

ولدينا مما سبق :

$\int_{-1}^{0} x^2 e^{-x} dx = [F(x)]_{-1}^{0} = F(0) - F(-1)$

حيث : $F(x) = -(x^2+2x+2)e^{-x}$

إذن :

$F(0) = -2e^0 = \boxed{-2}$

و $F(-1) = -(1)e^1 = -e$